複素数平面上において，等式 $5x^2+5y^2-6xy=8$ を満たす点 $x+yi$ 全体の表す曲線を C_0 とする．また，曲線 C_0 を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた曲線を C_1 とする．等式 $ax^2+by^2+cxy+dx+ey=4$ を満たす点 $x+yi$ 全体の表す曲線が C_1 であるとき，次の問いに答えよ．ただし，x, y は実数，i は虚数単位，a, b, c, d, e は定数とする．

(1) 点 $p+qi$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点を $s+ti$ とするとき，p と q を s と t を用いて表せ．ただし，p, q, s, t は実数とする．

(2) a, b, c, d, e の値を求めよ．

(3) 曲線 C_0 上の点で，原点からの距離が最大となる点をすべて求めよ．

(17 和歌山大 システム工 5)

【答】

(1) $p=\dfrac{s+t}{\sqrt{2}}$, $q=\dfrac{-s+t}{\sqrt{2}}$

(2) $a=4$, $b=1$, $c=d=e=0$

(3) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

【解答】

(1) $s+ti$ は $p+qi$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点であるから

$$s+ti=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(p+qi)$$

であり

$$\begin{aligned}p+qi&=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-1}(s+ti)\\&=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(s+ti)\\&=\frac{1-i}{\sqrt{2}}(s+ti)\\&=\frac{s+t}{\sqrt{2}}+\frac{-s+t}{\sqrt{2}}i\end{aligned}$$

p, q, s, t は実数であるから

$$\boldsymbol{p=\frac{s+t}{\sqrt{2}},\ q=\frac{-s+t}{\sqrt{2}}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

(2) C_0 上の点 $p+qi$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を $s+ti$ とする．

点 $p+qi$ は $5p^2+5q^2-6pq=8$ を満たすから，(1) より

$$5\frac{(s+t)^2}{2}+5\frac{(-s+t)^2}{2}-6\frac{(s+t)(-s+t)}{2}=8$$

$$5(s^2+t^2)-3(-s^2+t^2)=8$$

$$8s^2+2t^2=8$$

C_1 は C_0 を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた曲線であるから，C_1 の方程式は

$$4x^2 + y^2 = 4$$

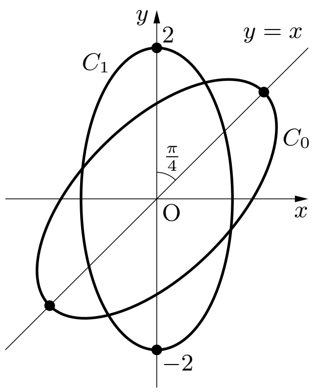
である．$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = 4$ と比較すると

$$\boldsymbol{a = 4,\ b = 1,\ c = d = e = 0}$$ ……(答)

(3) C_1 の方程式は

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

であり，これは原点を中心とする長軸の長さが 4，短軸の長さが 2 の楕円である．したがって，C_1 上の点で，原点からの距離が最大となる点は $\pm 2i$ である．



原点のまわりの回転では，回転前の点と原点からの距離は，回転後の点と原点からの距離と変わらないから，曲線 C_0 上の点で，原点からの距離が最大となる点は，点 $\pm 2i$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点である．すなわち

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}(\pm 2i) = \pm\sqrt{2}(i+1)$$

よって，求める点のすべては

$$\boldsymbol{\sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$$ ……(答)

である．