複素数 $x = 1 - \sqrt{3}i$ について以下の問いに答えなさい．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $x = 1 - \sqrt{3}i$ を解とする実数係数の 2 次方程式を作りなさい．
(2) x^n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めなさい．
(3) 自然数 m に対して $\sum_{k=1}^{3m} (-2)^{-k} x^k$ を求めなさい．

(17 大分大 医 2)

【答】
(1) $x^2 - 2x + 4 = 0$
(2) $x^n = 2^n \left\{ \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right) \right\}$
(3) $\sum_{k=1}^{3m} (-2)^{-k} x^k = 0$

【解答】

(1) $x = 1 - \sqrt{3}i$ のとき

$$(x-1)^2 = (-\sqrt{3}i)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = -3$$

よって，$x = 1 - \sqrt{3}i$ を解とする実数係数の 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2 - 2x + 4 = 0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- a が 0 でない実数ならば

$$a(x^2 - 2x + 4) = 0$$

は $x = 1 - \sqrt{3}i$ を解とする実数係数の 2 次方程式である．

(2) $x = 1 - \sqrt{3}i$ を極形式で表すと

$$x = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

であり，ド・モアブルの定理を用いると

$$\boldsymbol{x^n = 2^n \left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right\}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $(-2)^{-k}x^k = \left(-\frac{x}{2}\right)^k$ であり，$-\frac{x}{2} = -\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \neq 1$ であるから

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3m}(-2)^{-k}x^k &= \sum_{k=1}^{3m}\left(-\frac{x}{2}\right)^k = -\frac{x}{2}\cdot\frac{1-\left(-\frac{x}{2}\right)^{3m}}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{-x}{2+x}\left\{1-(-1)^{3m}\left(\frac{x}{2}\right)^{3m}\right\} \\
&= \frac{-x}{2+x}\left\{1-(-1)^{m}\cdot\frac{2^{3m}\{\cos(-m\pi)+i\sin(-m\pi)\}}{2^{3m}}\right\} \\
&= \frac{-x}{2+x}\left\{1-(-1)^{m}\cdot(-1)^{m}\right\} \quad (\because\ \cos(-m\pi)=(-1)^m) \\
&= \frac{-x}{2+x}(1-1) \\
&= \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．

- $-\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ は 1 の虚数立方根の 1 つであるから，これを ω とおくと $\omega^3 = 1$ である．

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3m}(-2)^{-k}x^k &= \sum_{k=1}^{3m}\left(-\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{3m}w^k \\
&= \frac{\omega(1-\omega^{3m})}{1-\omega} = \frac{\omega(1-1^m)}{1-\omega} \\
&= 0
\end{aligned}
$$