複素数 $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$ について，次の問いに答えよ．ただし，$i^2 = -1$ とする．

(i) α^2，$\dfrac{1}{\alpha}$ の値をそれぞれ $a + bi$ (a, b は実数) の形で表せ．

(ii) $z^6 = \alpha^6$ となる複素数 z のうち，実数でないものをすべて掛けた数を求めよ．

(17 大阪工大 3(1))

【答】

(i) $\alpha^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$，$\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$

(ii) 16

【解答】

(i) α を極形式で表すと

$$\alpha = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから

$$\alpha^2 = 2^2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \boldsymbol{-2 + 2\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1} = 2^{-1}\left(\cos -\frac{\pi}{3} + i\sin -\frac{\pi}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- それぞれを直接計算すると

$$\alpha^2 = (1 + \sqrt{3}i)^2 = 1 + 2\sqrt{3}i - 3 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + 3} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

(ii) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r \geqq 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$) とおく．

$$\alpha^6 = 2^6\left(\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}\right) = 2^6$$

であるから

$$z^6 = \alpha^6$$

$$r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = 2^6(\cos 0 + i\sin 0)$$

から

$$r = 2, \quad \theta = \frac{k\pi}{3} \quad \left(0 \leqq \frac{k\pi}{3} < 2\pi\right)$$

すなわち

$$z = 2\left(\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\right) \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

である．このうち実数でないのは

$$k = 1,\ 2,\ 4,\ 5$$

の 4 個である．これら 4 個の z をすべて掛けた数の積は

$$2^4\left(\cos\frac{1+2+4+5}{3}\pi + i\sin\frac{1+2+4+5}{3}\pi\right)$$

$$= 16(\cos 4\pi + i\sin 4\pi)$$

$$= \mathbf{16} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $\zeta = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおくと

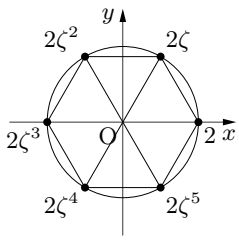
$$z = 2\left(\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

は

$$2,\ 2\zeta,\ 2\zeta^2,\ 2\zeta^3,\ 2\zeta^4,\ 2\zeta^5$$

と表すことができる．実数でないものをすべて掛けた数の積は

$$2\zeta\cdot 2\zeta^2\cdot 2\zeta^4\cdot 2\zeta^5 = 2^4\zeta^{1+2+4+5} = 16\zeta^{12} = 16$$



- $\alpha^6 = 2^6\left(\cos\dfrac{6\pi}{3} + i\sin\dfrac{6\pi}{3}\right) = 2^6$ であるから

$$\begin{aligned} & z^6 - \alpha^6 \\ =& z^6 - 2^6 \\ =& (z^3+8)(z^3-8) \\ =& (z+2)(z^2-2z+4)\times(z-2)(z^2+2z+4) \end{aligned}$$

より，$z^6 - \alpha^6 = 0$ の解は

$$z = \pm 2,\ 1\pm\sqrt{3}i,\ -1\pm\sqrt{3}i$$

である．虚数解すべての積は

$$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)\times(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i) = 4\times 4 = 16$$