$z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおく．ただし，i は虚数単位である．次の問いに答えよ．

(1) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を示せ．

(2) $w=z+\dfrac{1}{z}$ のとき，w^2+w の値を求めよ．

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ．

(4) 単位円に内接する正五角形の面積を求めよ．

(17 大阪市大 後 理・工 2)

【答】

(1) 略

(2) 1

(3) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(4) $\dfrac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

【解答】

(1) $z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ は $z\fallingdotseq 1$ であり，$z^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ であるから

$$z^4+z^3+z^2+z+1=\frac{1-z^5}{1-z}=\frac{1-1}{1-z}=0 \quad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

(2) $w=z+\dfrac{1}{z}$ のとき

$$\begin{aligned}
w^2+w&=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}\\
&=z^2+2+\frac{1}{z^2}+z+\frac{1}{z}\\
&=\frac{z^4+2z^2+1+z^3+z}{z^2}\\
&=\frac{z^2+(z^4+z^3+z^2+z+1)}{z^2}\\
&=\frac{z^2+0}{z^2}\quad(\because\ (1))\\
&=\mathbf{1}
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$(答)

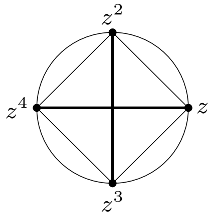
- (1) の 4 次方程式は相反方程式であることに着目して，両辺を z $(\fallingdotseq 0)$ で割ると

$$\begin{aligned}
&z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0\\
&\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0\\
&\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0\\
&w^2+w-1=0\\
\therefore\quad &w^2+w=1
\end{aligned}$$

- $z^5 = 1$ に注意しながら，2 乗の計算を続け，解 z，z^2，z^3，z^4 の間の関係を探る．

$$z \longrightarrow z^2 \longrightarrow z^4 \longrightarrow z^8 = z^3 \longrightarrow z^6 = z$$

$z + z^4$ と $z^2 + z^3$ を解とする 2 次方程式をつくる．



$$\begin{aligned}(z + z^4) + (z^2 + z^3) &= z^4 + z^3 + z^2 + z \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z + z^4)(z^2 + z^3) &= z^3 + z^4 + z^6 + z^7 \\ &= z^3 + z^4 + z + z^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

より，$z + z^4$ と $z^2 + z^3$，すなわち $z + \overline{z} = z + \dfrac{1}{z}$ と $z^2 + \overline{z^2} = z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ は

$$w^2 + w - 1 = 0$$

の解である．

(3) ド・モアブルの定理より

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}$$

であるから

$$\begin{aligned}w &= z + \frac{1}{z} \\ &= \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right) + \left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right\} \\ &= 2\cos\frac{2\pi}{5}\end{aligned}$$

であり

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{w}{2}$$

である．w の値を求める．

(2) より $w^2 + w - 1 = 0$ であるから

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

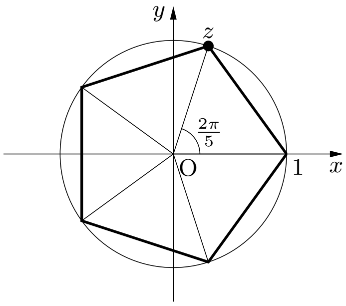
であるが，$w = 2\cos\dfrac{2\pi}{5} > 0$ であるから

$$w = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

よって

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \boldsymbol{\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(4) $\sin\dfrac{2\pi}{5} > 0$ より



$$\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{16-(6-2\sqrt{5})}}{4} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

単位円に内接する正五角形の面積は

$$5\times\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{5} = \boldsymbol{\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$ ……(答)

- $w = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ より

$$z+\frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$2z^2-(-1+\sqrt{5})z+2=0$$

$$z = \frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{(6-2\sqrt{5})-16}}{4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$$

であるから

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

である.