次の問に答えよ．

(1) 次の不等式をみたす実数 x の範囲を求めよ．

$$x^4-2x^3-x+2 \leqq 0$$

(2) 次の不等式をみたす複素数 z の範囲を複素数平面上に図示せよ．

$$|z|^4-2|z|^3-|z|+2 \leqq 0$$

(3) 次の不等式をみたす複素数 z の範囲を複素数平面上に図示せよ．

$$|z-iz-1-i|^4-2|z-iz-1-i|^3-|z-iz-1-i|+2 \leqq 0$$

(17 大阪教大 2)

【答】

(1) $1 \leqq x \leqq 2$
(2) 略
(3) 略

【解答】

(1) 不等式 $x^4-2x^3-x+2 \leqq 0$ の左辺を因数分解し

$$(x-1)(x-2)(x^2+x+1) \leqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

x は実数より

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

であるから，①をみたす実数 x の範囲は

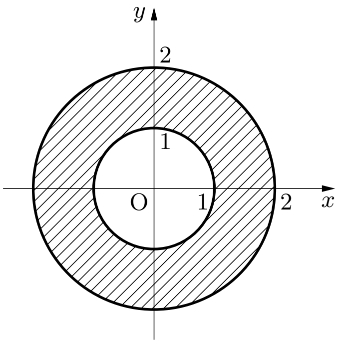
$$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $|z|$ は 0 以上の実数であるから，(1) より

$$1 \leqq |z| \leqq 2$$

となる．

よって，z の範囲は O を中心とする半径 1 と半径 2 の同心円にはさまれた右図の斜線部分である (境界を含む)．



(3) $t=|z-iz-1-i|$ とおくと，t は 0 以上の実数であり

$$t^4-2t^3-t+2 \leqq 0$$

であるから，(1) より

$$1 \leqq t \leqq 2$$

すなわち

$$1 \leqq |z-iz-1-i| \leqq 2$$

となる．ここで

$$|z-iz-1-i|=|1-i|\left|z-\frac{1+i}{1-i}\right|=\sqrt{2}|z-i|$$

であるから

$$1 \leqq \sqrt{2}|z-i| \leqq 2$$

すなわち

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq |z-i| \leqq \sqrt{2}$$

となる．z の範囲は i を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ と半径 $\sqrt{2}$ の同心円にはさまれた右図の斜線部分である (境界を含む).