虚数単位を i で表す．$i^2=-1$
以下の問いに答えなさい．
二つの実数 a と b を用いて複素数 x を $x=a+bi$ と置く．

(1) x^2 を計算しなさい．

$$x^2=\boxed{\mathsf{1}}+\boxed{\mathsf{2}}i$$

(2) x^2 の実部が 0 になる a と b についての条件式を書きなさい．

$$\boxed{\mathsf{3}}=0$$

(3) x^2 の虚部が 1 になる a と b についての条件式を書きなさい．

$$\boxed{\mathsf{4}}=1$$

(4) これまでの結果を用いて方程式 $x^2=i$ の二つの根を求めなさい．
「根は $x=\boxed{\mathsf{5}}+\boxed{\mathsf{6}}i$ と $x=\boxed{\mathsf{7}}+\boxed{\mathsf{8}}i$ だ．」

(17 奥羽大 歯 1)

【答】

1	2	3	4	5	6	7	8
a^2-b^2	$2ab$	a^2-b^2	$2ab$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解答】

(1) $x=a+bi$ より

$$\begin{aligned} x^2&=(a+bi)^2\\ &=a^2+2abi+b^2i^2\\ &=\boxed{a^2-b^2}+\boxed{2ab}i \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (1，2 の答)

(2) ①より

$$(x^2 \text{ の実部})=0 \iff \boxed{a^2-b^2}=0$$

$\cdots\cdots$ (3 の答)

(3) ①より

$$(x^2 \text{ の虚部})=1 \iff \boxed{2ab}=1$$

$\cdots\cdots$ (4 の答)

(4) $x=a+bi$ とおくとき，(2)，(3) より

$$x^2=i \iff \begin{cases} a^2-b^2=0 & \cdots\cdots ② \\ 2ab=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③より，a と b は同符号である．このことと②より

$$a=b \qquad \cdots\cdots ④$$

④を③に代入すると

$$2a^2=1 \qquad \therefore \quad a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

これと④より，$(a,\ b)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (複号同順) である．

よって，方程式 $x^2=i$ の二つの根 (解) は

$$x=\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}+\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}i,\quad \boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}+\boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}i$$ …… (5〜8 の答)

- (1)〜(3) の流れを無視して，極形式を利用してもよい．
  $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned}&x^2=i\\ \Longleftrightarrow\ &r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\\ \Longleftrightarrow\ &\begin{cases}r^2=1\\ 2\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\text{ は整数})\end{cases}\end{aligned}$$

$r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi$ より

$$\begin{cases}r=1\\ \theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}\end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned}x&=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$