複素数

$$z = 1 + \sqrt{3}\,i, \quad w = \frac{1}{-1+i}$$

に対して，z^8w^7 の絶対値 r と偏角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(17 学習院大 理 1(2))

【答】 $r = 16\sqrt{2}$，$\theta = \dfrac{17}{12}\pi$

【解答】

z，w をそれぞれ極形式で表すと

$$\begin{aligned} z &= 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ w &= \frac{1}{-1+i} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right\}^{-1} \\ &= 2^{-\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right\} \end{aligned}$$

ド・モアブルの定理により

$$z^8 = 2^8\left(\cos\frac{8}{3}\pi + i\sin\frac{8}{3}\pi\right)$$

$$w^7 = 2^{-\frac{7}{2}}\left\{\cos\left(-\frac{21}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{21}{4}\pi\right)\right\}$$

よって

$$\begin{aligned} z^8w^7 &= 2^{8-\frac{7}{2}}\left\{\cos\left(\frac{8}{3}\pi - \frac{21}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{8}{3}\pi - \frac{21}{4}\pi\right)\right\} \\ &= 2^{\frac{9}{2}}\left\{\cos\left(-\frac{31}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{31}{12}\pi\right)\right\} \\ &= 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i\sin\frac{17}{12}\pi\right) \end{aligned}$$

であるから，z^8w^7 の絶対値 r と偏角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ は

$$\boldsymbol{r = 16\sqrt{2},\ \theta = \frac{17}{12}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$