複素数に関する次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 方程式 $z^3 = i$ の 3 つの解 z_1，z_2，z_3 を求めよ．ただし，$0 \leqq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$ とする．

(2) 等式 $z\overline{z} + 2(z + \overline{z}) + 2\sqrt{3}i(z - \overline{z}) + 12 = 0$ をみたす点 z 全体が表す図形を求め，その図形を複素数平面上に図示せよ．

(3) a を正の実数とする．複素数 z_0 は ${z_0}^3 = ia$ をみたし，かつ z_0 の表す点が (2) で求めた図形上にあるとする．このとき，a と z_0 の値をそれぞれ求めよ．

(17 宇都宮大 工・地域デザイン科・農 6)

【答】

(1) $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$，$z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$，$z_3 = -i$

(2) $-2 + 2\sqrt{3}i$ を中心とする半径 2 の円．図は略．

(3) $a = 24\sqrt{3}$，$z_0 = -3 + \sqrt{3}i$

【解答】

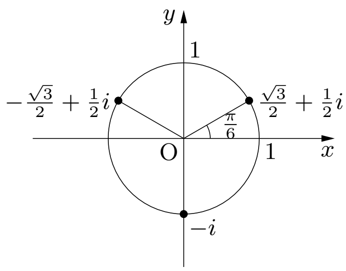
(1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくことができる．このとき

$$z^3 = i \iff r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ (n \text{ は整数}) \end{cases}$$

$r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$$



$z^3 = i$ の 3 つの解 z_1，z_2，z_3 は $0 \leqq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$ を満たすから

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$z_2 = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$z_3 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = \boldsymbol{-i} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 与えられた等式を変形する．

$$z\overline{z} + 2(z + \overline{z}) + 2\sqrt{3}i(z - \overline{z}) + 12 = 0$$

$$z(\overline{z} + 2 + 2\sqrt{3}i) + (2 - 2\sqrt{3}i)\overline{z} + 12 = 0$$

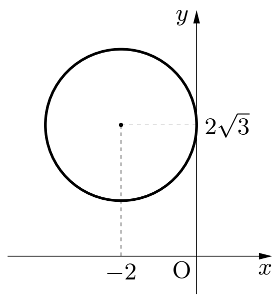
$\alpha = 2 - 2\sqrt{3}i$ とおくと

$$z(\overline{z} + \overline{\alpha}) + \alpha\overline{z} + 12 = 0$$

$$(z + \alpha)(\overline{z} + \overline{\alpha}) = \alpha\overline{\alpha} - 12$$

$$|z + \alpha|^2 = (4 + 12) - 12$$

$$|z + \alpha| = 2$$



よって，点 z 全体が表す図形は，点 $-\alpha = \boldsymbol{-2 + 2\sqrt{3}i}$ **を中心とする半径 2 の円**である．これを図示すると**右図の太線部分**となる． ……(答)

(3) z_0 は ${z_0}^3 = ia$ $(a > 0)$ をみたすから

$$\left(\frac{z_0}{\sqrt[3]{a}}\right)^3 = i$$

であり，(1) より

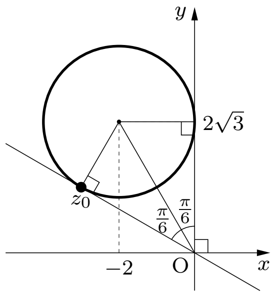
$$\frac{z_0}{\sqrt[3]{a}} = z_1,\ z_2,\ z_3$$

$$\therefore\quad z_0 = \sqrt[3]{a}z_1,\ \sqrt[3]{a}z_2,\ \sqrt[3]{a}z_3$$

さらに，z_0 は (2) で求めた図形上を動くから

$$\frac{\pi}{2} \leqq \arg z_0 \leqq \frac{5}{6}\pi$$

であり，この条件をみたすのは $\sqrt[3]{a}z_2$ である．



$$z_0 = \sqrt[3]{a}z_2 = \sqrt[3]{a}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$= \sqrt[3]{a}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

である．$|z_0| = 2\sqrt{3}$ より

$$\sqrt[3]{a} = 2\sqrt{3} \qquad \therefore\quad a = (2\sqrt{3})^3 = \mathbf{24\sqrt{3}}$$ ……(答)

$$z_0 = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \boldsymbol{-3 + \sqrt{3}i}$$ ……(答)