次の各問に答えよ．ただし，$i$ は虚数単位とする．

(1) 等式 $z^2 = i$ を満たす複素数 $z$ は 2 つある．それらを $x+yi$ ($x$, $y$ は実数) の形で表せ．

(2) 等式 $w^2 - 2iw = 1+i$ を満たす複素数 $w$ は 2 つあり，それらを $\alpha$, $\beta$ とする．ただし，$\alpha$ の実部は $\beta$ の実部より大きいとする．$\alpha$, $\beta$ を $x+yi$ ($x$, $y$ は実数) の形で表せ．

(3) 複素数平面上で，原点を O とし，(2) で求めた $\alpha$, $\beta$ が表す点をそれぞれ A，B とするとき，三角形 OAB の面積を求めよ．

(17 宮崎大 工 4)

---

【答】

(1) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

(2) $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i,\ \beta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

---

【解答】

(1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくことができる．

$$z^2 = i \iff r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\iff \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi \end{cases}$$

$$\therefore \quad r = 1\ (\geqq 0),\ \theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

$r = 1,\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，　$\boldsymbol{z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$ ……(答)

$r = 1,\ \theta = \dfrac{5}{4}\pi$ のとき，　$\boldsymbol{z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$ ……(答)

- $z = x + yi$ ($x$, $y$は実数) とおくと

$$z^2 = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$x^2 - y^2$, $2xy$ は実数であるから

$$z^2 = i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & \cdots\cdots ① \\ 2xy = 1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より $x$, $y$ は同符号であり，①とあわせると

$$x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(2) $w^2-2iw=1+i$ …… $(*)$ より

$$(w-i)^2=i$$

であり，(1) より

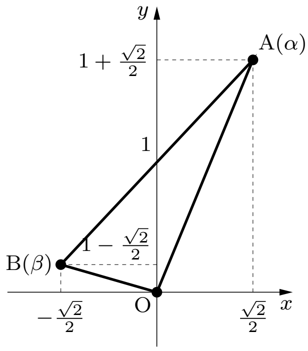
$$w-i=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore\quad w=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$$

$(*)$ の解 $\alpha,\ \beta$ は ($\alpha$ の実部) $>$ ($\beta$ の実部) であるから

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i,\ \beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i}$$ ……(答)

(3) 三角形 OAB の面積 $S$ は




$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4}+\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4}\right|\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$ ……(答)

- 三角形 OAB の面積は虚軸を境に左右に分けて求めてもよい．
  AB と虚軸の交点は $i$ であるから，求める面積 $S$ は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$