方程式 $(z-i)^4=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ の解を，虚部の大きい方から順に z_1，z_2，z_3，z_4 とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 複素数 z_1，z_2，z_3，z_4 を求めよ．

(2) 複素数 $\left\{(3-\sqrt{3})\dfrac{z_1}{z_2}\right\}^{10}$ を求めよ．

(3) 実数 s に対して，$\dfrac{|z_3-s|}{|z_2-s|}$ が最大になる s の値を求めよ．

(17 山形大 医・理 6)

【答】

(1) $z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}i$，$z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$，$z_3=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$，$z_4=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}i$

(2) $32i$

(3) $s=\beta=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}$

【解答】

(1) $z-i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$$(z-i)^4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

より

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore\quad \begin{cases} r^4=1 \\ 4\theta=\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi\ (k\text{ は整数}) \end{cases}$$

$r\geqq 0$ だから　$r=1$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k}{2}\pi$ であり，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{4\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{10\pi}{6}$$

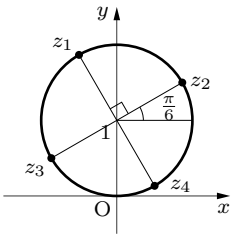
$z=\cos\theta+i(1+\sin\theta)$ を虚部の大きい方から順に並べて

$$\boldsymbol{z_1=-\frac{1}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}i},$$

$$\boldsymbol{z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i},$$

$$\boldsymbol{z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i},$$

$$\boldsymbol{z_4=\frac{1}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i}$$



……(答)

(2) (1) より

$$\begin{aligned}(3-\sqrt{3})\frac{z_1}{z_2} &= (3-\sqrt{3})\frac{-1+(2+\sqrt{3})i}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}i)}\\ &= (\sqrt{3}-1)\frac{\{-1+(2+\sqrt{3})i\}(1-\sqrt{3}i)}{1+3}\\ &= (\sqrt{3}-1)\frac{2+2\sqrt{3}+(2+2\sqrt{3})i}{4}\\ &= 1+i\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\left\{(3-\sqrt{3})\frac{z_1}{z_2}\right\}^{10} &= (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{5}{2}\pi+i\sin\frac{5}{2}\pi\right)\\ &= \boldsymbol{32i}\end{aligned}$$

……(答)

(3) (1) より

$$\begin{aligned}\frac{|z_3-s|^2}{|z_2-s|^2} &= \frac{\left|-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-s+\dfrac{1}{2}i\right|^2}{\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}-s+\dfrac{3}{2}i\right|^2}\\ &= \frac{(\sqrt{3}+2s)^2+1}{(\sqrt{3}-2s)^2+9}\\ &= \frac{s^2+\sqrt{3}s+1}{s^2-\sqrt{3}s+3}\\ &= 1+\frac{2(\sqrt{3}s-1)}{s^2-\sqrt{3}s+3}\end{aligned}$$

$f(s)=\dfrac{\sqrt{3}s-1}{s^2-\sqrt{3}s+3}$ とおき，s で微分すると

$$f'(s)=\frac{\sqrt{3}(s^2-\sqrt{3}s+3)-(\sqrt{3}s-1)(2s-\sqrt{3})}{(s^2-\sqrt{3}s+3)^2}=\frac{-\sqrt{3}s^2+2s+2\sqrt{3}}{(s^2-\sqrt{3}s+3)^2}$$

だから，$f'(s)=0$ の解 $s=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと，$f(s)$ の増減表は右のようになる．

s	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(s)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(s)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

また，$\displaystyle\lim_{s\to\pm\infty}f(s)=\lim_{s\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt{3}-\dfrac{1}{s}}{s-\sqrt{3}+\dfrac{3}{s}}\right)=0$ より，$f(s)$ は $s=\beta=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}$ で極大かつ最大となる．

よって，$\dfrac{|z_3-s|}{|z_2-s|}$ が最大になる s の値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}}$ ……(答)