(1) 0 でない複素数 z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする．このとき，$z+\dfrac{1}{z}$ の実部と虚部を r と θ を用いてそれぞれ表せ．ただし，i は虚数単位とする．

(2) z を実数ではない複素数とする．$z+\dfrac{1}{z}$ が実数であるとき，$|z|=1$ となることを示せ．

(3) z を実数ではない複素数とする．$\dfrac{z^2-2z+2}{z-1}$ が実数であるとき，$z\overline{z}-z-\overline{z}=0$ となることを示せ．ここで，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す．

(17 岐阜大 後 医・工・教育 5-I)

【答】

(1) 実部 $\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$,　虚部 $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$

(2) 略

(3) 略

【解答】

(1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\fallingdotseq 0$ のとき

$$\begin{aligned} z+\frac{1}{z} &= r(\cos\theta+i\sin\theta)+r^{-1}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\} \\ &= r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta) \\ &= \left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{aligned}$$

よって

実部 $\boldsymbol{\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta}$,　虚部 $\boldsymbol{\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta}$ ……(答)

(2) z は $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくことができ，z は実数でない複素数であるから

$$r>0 \text{ かつ } \sin\theta\fallingdotseq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) の結果より

$$z+\frac{1}{z}\text{が実数である} \iff \left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta=0$$

①より

$$r-\frac{1}{r}=0 \qquad \therefore\quad r=1(>0)$$

よって，$|z|=1$ である． …… (証明終わり)

(3) z は実数でない複素数より

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad (① \text{ かつ } 0\leqq\theta<2\pi)$$

とおくことができる．

$$\frac{z^2-2z+2}{z-1}=z-1+\frac{1}{z-1}$$

z は実数でない複素数であるから，$z-1=(r\cos\theta-1)+ir\sin\theta$ も実数でない複素数である．(2) の結果より

$$|z-1|=1$$

である．これより

$$\begin{aligned} &(r\cos\theta-1)^2+(r\sin\theta)^2=1\\ &r^2-2r\cos\theta=0\\ \therefore\quad &r=2\cos\theta(>0) \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} z\overline{z}-z-\overline{z}&=|z|^2-(z+\overline{z})\\ &=r^2-2r\cos\theta\\ &=r(r-2\cos\theta)\\ &=0 \end{aligned}$$

…… (証明終わり)