複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ および $\alpha+\beta+\gamma=0$ を満たすとき，

$$|\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2=6$$

となることを示せ．

(17 岐阜大 後 医・工・教育 5-II)

【答】 略

【解答】

$|\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2$ を展開すると

$$\begin{aligned}
&|\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2\\
=&(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}+(\alpha-\gamma)\overline{(\alpha-\gamma)}\\
=&(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})+(\alpha-\gamma)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})\\
=&(\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta})+(\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\gamma}-\gamma\overline{\alpha}+\gamma\overline{\gamma})\\
=&2|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2-\alpha(\overline{\beta}+\overline{\gamma})-\overline{\alpha}(\beta+\gamma) \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は

$$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$$

を満たし，および $\alpha+\beta+\gamma=0$ より

$$\beta+\gamma=-\alpha,\ \overline{\beta}+\overline{\gamma}=-\overline{\alpha}$$

を満たすから

$$\begin{aligned}
① &= 2\cdot1^2+1^2+1^2-\alpha(-\overline{\alpha})-\overline{\alpha}(-\alpha)\\
&=4+2|\alpha|^2\\
&=4+2\cdot1^2\\
&=\mathbf{6}
\end{aligned}$$

……(答)

- 極形式を用いて計算することもできる．
  $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ だから

$$\begin{cases}\alpha=\cos\theta_1+i\sin\theta_1\\ \beta=\cos\theta_2+i\sin\theta_2\\ \gamma=\cos\theta_3+i\sin\theta_3\end{cases}$$

とおくことができる．このとき $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は $\alpha+\beta+\gamma=0$ を満たすから

$$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0\end{cases} \qquad \cdots\cdots ㋐$$

である．また

$$\begin{aligned}
|\alpha-\beta|^2&=(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_1-\sin\theta_2)^2\\
&=2-2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)\\
|\alpha-\gamma|^2&=(\cos\theta_1-\cos\theta_3)^2+(\sin\theta_1-\sin\theta_3)^2\\
&=2-2(\cos\theta_1\cos\theta_3+\sin\theta_1\sin\theta_3)
\end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
&|\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2\\
=&4-2\{\cos\theta_1(\cos\theta_2+\cos\theta_3)+\sin\theta_1(\sin\theta_2+\sin\theta_3)\}\\
=&4-2\{\cos\theta_1(-\cos\theta_1)+\sin\theta_1(-\sin\theta_1)\} \quad (\because \text{ア})\\
=&4+2(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)\\
=&6
\end{aligned}
$$

- $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ により，3 点 A(α)，B(β)，C(γ) は原点 O を中心とする半径 1 の円周上の点である．さらに α, β, γ は $\alpha+\beta+\gamma=0$ を満たすから，$\triangle$ABC の重心は O であり，外心と重心が一致するから，$\triangle$ABC は正三角形である．

  $$|\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\mathrm{AB}^2$$

  正三角形 $\triangle$ABC の一辺の長さは，正弦定理より

  $$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\cdot 1 \qquad \therefore \quad \mathrm{AB}=2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

  であるから

  $$|\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2=2\cdot(\sqrt{3})^2=6$$