次の三つの複素数を考える．

$$\alpha = 1 + i,\ \beta = 4 + 2i,\ \gamma = 3 + 3i$$

複素数平面上で，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ に対応する点をそれぞれ A, B, C とし，0 に対応する点を O，1 に対応する点を P_0 とする．点 P_1 を次の性質を満たす複素数平面上の点とする．

- P_1 に対応する複素数 z_1 の虚部は正である．
- $\mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA} = \mathrm{OP}_0 : \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 : \mathrm{P}_1\mathrm{O}$

さらに，複素数平面上の点 P_n $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を次の性質を満たすように定める．

- $\triangle\mathrm{OP}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}$ と$\triangle\mathrm{OP}_{n-1}\mathrm{P}_n$ は辺 OP_{n-1} 以外に共通部分をもたない．
- $\mathrm{AB} :\ \mathrm{BC} :\ \mathrm{CA} = \mathrm{OP}_{n-1} : \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n : \mathrm{P}_n\mathrm{O}$

点 P_n に対応する複素数を z_n とする．次の問いに答えよ．

(1) 複素数 z_1 を求めよ．
(2) 複素数 z_2 を求めよ．
(3) 正の整数 n に対し，$\triangle\mathrm{OP}_{n-1}\mathrm{P}_n$ の面積を n を用いて表せ．
(4) z_n の実部が正であり，かつ虚部が負となる最小の n を求めよ．必要ならば巻末にある三角関数表 (省略) を用いてもよい．

(17 広島大 後 理 (数) 2)

【答】

(1) $z_1 = \dfrac{4+2i}{5}$

(2) $z_2 = \dfrac{12+16i}{25}$

(3) $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$

(4) $n = 11$

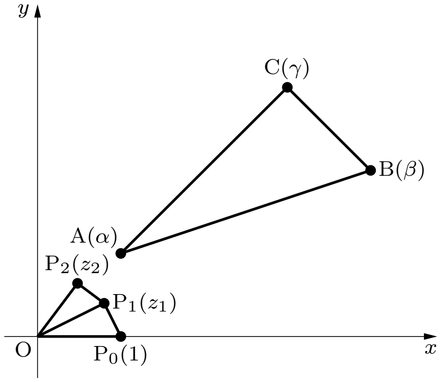
【解答】

(1) $\triangle\mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1 \backsim \triangle\mathrm{ABC}$ で，z_1 の虚部は正だから

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{OP}_1}{\mathrm{OP}_0} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \\ \angle\mathrm{P}_0\mathrm{OP}_1 = \angle\mathrm{BAC} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left|\dfrac{z_1 - 0}{1 - 0}\right| = \left|\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| \\ \arg\dfrac{z_1 - 0}{1 - 0} = \arg\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \end{cases}$$

$$\iff \dfrac{z_1 - 0}{1 - 0} = \dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$



$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の値を代入すると

$$z_1 = \frac{(3+3i)-(1+i)}{(4+2i)-(1+i)} = \frac{2+2i}{3+i} = \boldsymbol{\frac{4+2i}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 条件から，$\triangle \mathrm{OP_1P_2} \backsim \triangle \mathrm{ABC}$ であり

$$\frac{z_2-0}{z_1-0} = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

だから，$w = \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\left(= \dfrac{4+2i}{5}\right)$ とおくと

$$z_2 = wz_1 = w^2 = \left(\frac{4+2i}{5}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{12+16i}{25}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $\triangle \mathrm{OP}_{n-1}\mathrm{P}_n \backsim \triangle \mathrm{OP}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}$ であり，相似比は

$$|w| : 1 = \left|\frac{4+2i}{5}\right| : 1 = \frac{2}{\sqrt{5}} : 1$$

であるから

$$\triangle \mathrm{OP}_{n-1}\mathrm{P}_n = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \triangle \mathrm{OP}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1} = \frac{4}{5}\triangle \mathrm{OP}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}$$

よって

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{OP}_{n-1}\mathrm{P}_n &= \triangle \mathrm{OP_0P_1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{2}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(4) $z_n = wz_{n-1}$ だから

$$z_n = z_1 w^{n-1} = w^n$$

$w = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{i}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}(\cos\theta + i\sin\theta)$ を満たす角 θ $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ が存在し

$$\tan\theta = \frac{1}{2}$$

である．ド・モアブルの定理から

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

求める自然数 n は，z_n の実部が正であり，かつ虚部が負となる最小な n で

$$\begin{cases}\cos n\theta > 0 \\ \sin n\theta < 0\end{cases}$$

すなわち $270^\circ < n\theta < 360^\circ$ を満たす最小な自然数数 n である．

三角関数の表により，$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ は $\tan 26^\circ = 0.4877,\ \tan 27^\circ = 0.5095$ であるから

$$26^\circ < \theta < 27^\circ$$

これより

$$260^\circ < 10\theta < 270^\circ, \quad 286^\circ < 11\theta < 297^\circ$$

よって，求める n は

$$\boldsymbol{n = 11} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$