複素数 w を

$$w=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$

と定める．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) 変数 x の多項式 x^5-1 を $x-1$ で割った商を求めよ．

(2) $w^4+w^3+w^2+w+1$ の値を求めよ．

(3) z が複素数平面上を動くとき

$$|z-1|^2+|z-w|^2+|z-w^2|^2+|z-w^3|^2+|z-w^4|^2$$

の最小値を求めよ．また，最小値を与える z を求めよ．

(17 愛知教大 9)

【答】

(1) $x^4+x^3+x^2+x+1$

(2) 0

(3) $z=0$ のとき，最小値 5

【解答】

(1) 組立除法を実行すると，右のようになるから

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

であり，x^5-1 を $x-1$ で割った商は

$$\boldsymbol{x^4+x^3+x^2+x+1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $w=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$ であるから，ド・モアブルの定理を用いると

$$w^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

$$\therefore\quad w^5-1=0$$

(1) から

$$(w-1)(w^4+w^3+w^2+w+1)=0$$

さらに，$w\fallingdotseq 1$ であるから

$$w^4+w^3+w^2+w+1=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき

$$\begin{aligned}|z-w^k|^2&=(z-w^k)(\overline{z}-\overline{w^k})\\&=z\overline{z}-\overline{w^k}z-w^k\overline{z}+(w\overline{w})^k\\&=z\overline{z}-\overline{w^k}z-w^k\overline{z}+1\quad(\because\ |w|=1)\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}&|z-1|^2+|z-w|^2+|z-w^2|^2+|z-w^3|^2+|z-w^4|^2\\=&5z\overline{z}-(1+\overline{w}+\overline{w^2}+\overline{w^3}+\overline{w^4})z-(1+w+w^2+w^3+w^4)\overline{z}+5\\=&5z\overline{z}-\overline{(1+w+w^2+w^3+w^4)}z-(1+w+w^2+w^3+w^4)\overline{z}+5\\=&5z\overline{z}-0z-0\overline{z}+5\quad(\because\ (2))\\=&5(|z|^2+1)\qquad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

z は複素数平面上を動くから，$|z| \geqq 0$ であり，①は

$$\boldsymbol{z = 0} \text{ のとき, 最小値 } 5(0^2+1) = \mathbf{5} \qquad \cdots\cdots(答)$$

をとる.