$i$ を虚数単位とし，集合 $L$ と $M$ を

$$L = \{ z \mid z \text{ は整数 } a,\ b \text{ を用いて } z = a + bi \text{ と表される複素数} \}$$
$$M = \left\{ z \,\middle|\, z \in L,\ \frac{5}{z} \in L,\ |z| \neq 1,\ \left| \frac{5}{z} \right| \neq 1 \right\}$$

で定める．複素数 $z = a + bi$ に対して，$z \in L$ ならば $|z|^2 = \boxed{(オ)}$ は整数である．また，$z \in M$ ならば $|z|^2 = \boxed{(カ)}$ であり，集合 $M$ の要素の個数 $n(M)$ は $\boxed{(キ)}$ である．集合 $M$ の要素 $z$ のうち，実部が最も大きくかつ虚部が正となる $z$ は $\boxed{(ク)}$ である．

(17 年 慶應大 理工 1(2))

| (オ) | (カ) | (キ) | (ク) |
|---|---|---|---|
| $a^2+b^2$ | 5 | 8 | $2+i$ |

## 【チェック・チェック】

複素数の絶対値，集合，整数をあわせた基本問題です．

$z$，$\dfrac{5}{z} \in L$ より $|z|$，$\left|\dfrac{5}{z}\right|^2$ がともに整数であるという条件が効いてきます．条件$|z| \neq 1$，$\left|\dfrac{5}{z}\right| \neq 1$ により求める対象を絞っています．

---

【解答】

$z = a + bi$ に対して，$z \in L$ ならば，$a$，$b$ は整数であり

$$|z|^2 = \boxed{a^2 + b^2} \qquad \cdots\cdots \text{((オ) の答)}$$

←— 絶対値の定義です．

は整数である．

また，$z = a + bi$ に対して，$z \in M$ のとき，$z \in L$ であるから，$a^2 + b^2$ は整数である．

さらに，$\dfrac{5}{z} \in L$ でもあるから

$$\left|\frac{5}{z}\right|^2 = \frac{25}{|z|^2} = \frac{25}{a^2+b^2}$$

←— (オ) を利用しよう．

も整数である．したがって，$a^2 + b^2$ は 25 の正の約数であり

←— 整数の香りがしてきた．

$$a^2 + b^2 = 1,\ 5,\ 25$$

である．さらに，$|z| \neq 1$ かつ $\left|\dfrac{5}{z}\right| \neq 1$ より，$a^2 + b^2 \neq 1$ かつ $a^2 + b^2 \neq 25$ であるから

$$a^2 + b^2 = 5 \qquad \cdots\cdots ①$$

←— 都合よく 1 つの値に絞られた．

である．よって，$z \in M$ のとき，

$$|z|^2 = \boxed{5} \qquad \cdots\cdots \text{((カ) の答)}$$

である．①を満たす整数の組 $(a,\ b)$ は

$$(a,\ b) = (\pm 1,\ \pm 2),\ (\pm 2, \pm 1) \quad (\text{複号任意})$$

←— $M$ が確定し，問題はほぼ完了した．

であり，$2^2 + 2^2 = 8$ 通りある．よって，集合 $M$ の要素の個数 $n(M)$ は

$$n(M) = \boxed{8} \qquad \cdots\cdots \text{((キ) の答)}$$

であり，実部が最も大きく虚部が正となる $z$ は

$\boxed{2+i}$ …… ((ク) の答)

である．