$a,\ x,\ y$ は実数の定数とし，$0 < a < 1,\ 0 \leqq y < 2\pi$ を満たすとする．複素数 z を

$$z = a^x \cos y + (a^x \sin y)\, i$$

によって定める．ただし，i は虚数単位である．

(1) $z\overline{z}$ と z^2 のそれぞれの実部と虚部を求めよ．ただし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す．

(2) $x = 0$ のとき，$z^2 + \overline{z} = 0$ を満たす y の値をすべて求めよ．

(3) $\overline{z}$ の実部が $\overline{z}$ の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ．

(4) 複素数 w を $w = \log_a(a^x \cos y) + \{\log_a(a^x \sin y)\}\, i$ によって定める．w の実部が w の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ．

(17 慶應大 経済 5)

【答】

(1) $z\overline{z}$ の実部 a^{2x}，虚部 0；z^2 の実部 $a^{2x}\cos 2y$，虚部 $a^{2x}\sin 2y$

(2) $y = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \pi$

(3) x はすべての実数，y は $0 \leqq y < \dfrac{3}{4}\pi,\quad \dfrac{7}{4}\pi < y < 2\pi$

(4) x はすべての実数，y は $\dfrac{\pi}{4} < y < \dfrac{5}{4}\pi$

【解答】

(1) $z = a^x \cos y + (a^x \sin y)i = a^x(\cos y + i \sin y)$ より

$$z\overline{z} = |z|^2 = (a^x)^2 = a^{2x}$$

また，ド・モアブルの定理より

$$z^2 = (a^x)^2(\cos 2y + i \sin 2y) = a^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y)$$

よって

$\boldsymbol{z\overline{z}}$ **の実部** $\boldsymbol{a^{2x}}$**，虚部 0** ……(答)

$\boldsymbol{z^2}$ **の実部** $\boldsymbol{a^{2x}\cos 2y}$**，虚部** $\boldsymbol{a^{2x}\sin 2y}$ ……(答)

(2) $x = 0$ のとき，$z = \cos y + i \sin y$ であり

$$\begin{aligned} z^2 + \overline{z} &= (\cos 2y + i \sin 2y) + (\cos y - i \sin y) \\ &= (\cos 2y + \cos y) + i(\sin 2y - \sin y) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} z^2 + \overline{z} = 0 &\iff \begin{cases} \cos 2y + \cos y = 0 \\ \sin 2y - \sin y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2\cos^2 y + \cos y - 1 = 0 \\ 2 \sin y \cos y - \sin y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (2\cos y - 1)(\cos y + 1) = 0 \\ (2\cos y - 1)\sin y = 0 \end{cases} \\ &\iff \cos y = \frac{1}{2} \text{ または } \begin{cases} \cos y = -1 \\ \sin y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$0 \leqq y < 2\pi$ より

$$\boldsymbol{y = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) ($\overline{z}$ の実部) >($\overline{z}$ の虚部) より

$$a^x \cos y > -a^x \sin y$$

$0 < a < 1$ のとき，任意の実数 x に対して $a^x > 0$ だから

$$\sin y + \cos y > 0$$

$$\sqrt{2}\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$0 \leqq y < 2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{4} \leqq y + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4}$ だから

$$\frac{\pi}{4} \leqq y + \frac{\pi}{4} < \pi, \quad 2\pi < y + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

よって

$\boldsymbol{x}$ **は すべての実数,** ……(答)

$\boldsymbol{y}$ **は** $\boldsymbol{0 \leqq y < \frac{3}{4}\pi, \quad \frac{7}{4}\pi < y < 2\pi}$ ……(答)

(4) (w の実部) > (w の虚部) より

$$\log_a(a^x \cos y) > \log_a(a^x \sin y)$$

$0 < a < 1$ だから，真数を比較して

$$a^x \cos y < a^x \sin y$$

$a^x > 0$ より

$$\cos y < \sin y$$

$0 \leqq y < 2\pi$ より $\frac{\pi}{4} < y < \frac{5}{4}\pi$

よって

$\boldsymbol{x}$ **はすべての実数,** ……(答)

$\boldsymbol{y}$ **は** $\boldsymbol{\frac{\pi}{4} < y < \frac{5}{4}\pi}$ ……(答)