3 つの複素数 $\alpha,\ \beta,\ z$ は次の関係式

$$\alpha+\beta=z,\ \alpha\beta=i\overline{z},\ \alpha\beta\neq 0$$

を満たしているとする．ただし，i は虚数単位，$\overline{z}$ は z の共役な複素数とする．このとき $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が実数であるような z の条件を求め，そのような z の集合を複素数平面上に図示せよ．

(17 早稲田大 教育 2)

【答】 略

【解答】

与えられた条件は

$$\begin{aligned}
&\alpha+\beta=z && \cdots\cdots ① \\
&\alpha\beta=i\overline{z} && \cdots\cdots ② \\
&\alpha\beta\neq 0 && \cdots\cdots ③ \\
&\frac{\alpha}{\beta}=k\ (k\text{ は実数}) && \cdots\cdots ④
\end{aligned}$$

であり,「①かつ②かつ③かつ④」を満たす $\alpha,\ \beta,\ k$ が存在するような z の集合を求める．

$$\text{「①かつ②かつ③かつ④」}\cdots\cdots(*)$$

$$\iff \begin{cases}
\alpha\beta\neq 0 & \cdots\cdots ③ \\
\alpha=k\beta\ (k\text{ は実数}) & \cdots\cdots ④' \\
(k+1)\beta=z & \cdots\cdots ⑤ \\
k\beta^2=i\overline{z} & \cdots\cdots ⑥
\end{cases}$$

⑤において $k+1=0$ とすると，$z=0$ である．このとき⑥は

$$-\beta^2=0 \qquad \therefore\quad \beta=0$$

これは③に反する．したがって，$k+1\neq 0$ である．$(*)$ をさらに変形すると

$$(*)\iff \begin{cases}
\alpha\beta\neq 0 & \cdots\cdots ③ \\
\alpha=k\beta\ (k\text{ は実数}) & \cdots\cdots ④' \\
\beta=\dfrac{z}{k+1} & \cdots\cdots ⑤' \\
k\left(\dfrac{z}{k+1}\right)^2=i\overline{z} & \cdots\cdots ⑦
\end{cases}$$

③，⑤$'$ より $z\neq 0$ であるから

$$(*)\iff \begin{cases}
\alpha\beta\neq 0 & \cdots\cdots ③ \\
\alpha=k\beta\ (k\text{ は実数}) & \cdots\cdots ④' \\
\beta=\dfrac{z}{k+1} & \cdots\cdots ⑤' \\
\dfrac{k}{(k+1)^2}=i\dfrac{\overline{z}}{z^2} & \cdots\cdots ⑦'
\end{cases}$$

⑦$'$ を満たす実数 k が存在するとき $z\neq 0$ であり，③，④$'$，⑤$'$ を満たす $\alpha,\ \beta,\ k$ は存在するから，⑦$'$ を満たす実数 k が存在するような z の集合が求める集合である．

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned} i\frac{\overline{z}}{z^2} &= i\frac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)} \\ &= \frac{i}{r}\{\cos(-\theta) - i\sin(-\theta)\}\cdot(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-1} \\ &= \frac{i}{r}\{\cos(-\theta) - i\sin(-\theta)\}\cdot\{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\} \\ &= \frac{i}{r}\{\cos(-3\theta) + i\sin(-3\theta)\} \\ &= \frac{\sin 3\theta}{r} + i\frac{\cos 3\theta}{r} \end{aligned}$$

であり

$$⑦' \iff \begin{cases} \dfrac{\sin 3\theta}{r} = \dfrac{k}{(k+1)^2} \\ \dfrac{\cos 3\theta}{r} = 0 \end{cases}$$

$\cos 3\theta = 0$ $(0 \leqq \theta < 6\pi)$ のとき $\sin 3\theta = \pm 1$ である．

(i) $\begin{cases} \cos 3\theta = 0 \\ \sin 3\theta = 1 \end{cases}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{3\pi}{2}$ のとき

$$⑦' \iff \frac{1}{r} = \frac{k}{(k+1)^2} \iff (k+1)^2 = rk$$

$$\therefore \quad k^2 - (r-2)k + 1 = 0$$

これを満たす実数 k が存在する条件は (判別式) $\geqq 0$ である．

$$(\text{判別式}) = (r-2)^2 - 4 = r(r-4)$$

$r > 0$ より　　$r \geqq 4$

(ii) $\begin{cases} \cos 3\theta = 0 \\ \sin 3\theta = -1 \end{cases}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7\pi}{6},\ \dfrac{11\pi}{6}$ のとき

$$\begin{aligned} ⑦' &\iff \frac{-1}{r} = \frac{k}{(k+1)^2} \\ &\iff k^2 + (r+2)k + 1 = 0 \end{aligned}$$

これを満たす実数 k が存在する条件は (判別式) $\geqq 0$ である．

$$(\text{判別式}) = (r+2)^2 - 4 = r(r+4)$$

$r > 0$ より　　$r > 0$

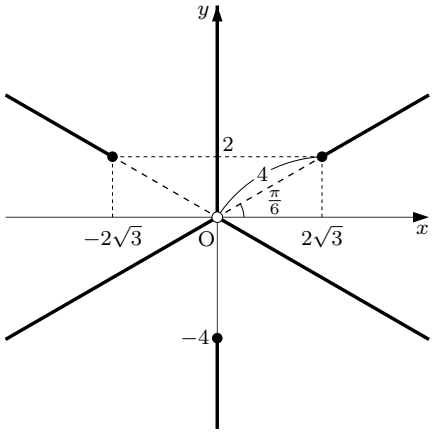
以上より，求める z の条件は

$$\arg z = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi \quad \text{かつ} \quad |z| \geqq 4$$

または

$$\arg z = \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \quad \text{かつ} \quad |z| > 0$$

であり，z の集合を図示すると次のようになる．



- (i)，(ii) の r の範囲は微分を利用して求めることもできる．

(i) $\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{3\pi}{2}$ のとき

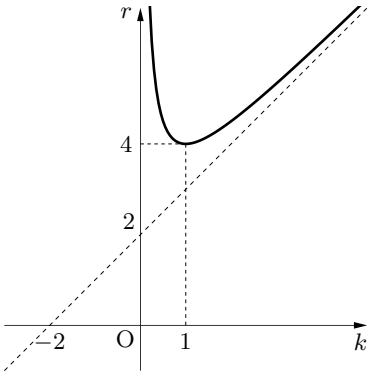
$$⑦' \iff \frac{1}{r} = \frac{k}{(k+1)^2}$$

$r > 0$ より $k > 0$ であるから

$$r = \frac{(k+1)^2}{k} = 2 + k + \frac{1}{k}$$

$$\frac{dr}{dk} = 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k+1)(k-1)}{k^2}$$

k	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{dr}{dk}$		$-$	0	$+$
r		$\searrow$	4	$\nearrow$



$\displaystyle\lim_{k\to 0+0} r = \infty$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} r = \infty$ であり，r のとり得る値の範囲は

$$r \geqq 4$$

である．

(ii) $\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7\pi}{6},\ \dfrac{11\pi}{6}$ のとき

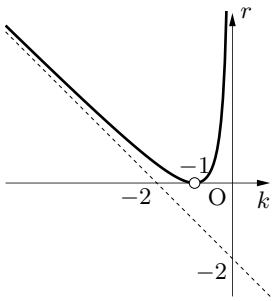
$$⑦' \iff \frac{-1}{r} = \frac{k}{(k+1)^2}$$

$r > 0$ より $k < 0$ であるから

$$r = -\frac{(k+1)^2}{k} = -2 - k - \frac{1}{k} \ (k \neq -1)$$

$$\frac{dr}{dk} = -1 + \frac{1}{k^2} = \frac{-(k+1)(k-1)}{k^2}$$

k	$\cdots$	(-1)	$\cdots$	(0)
$\frac{dr}{dk}$	$-$	(0)	$+$	
r	$\searrow$	(0)	$\nearrow$	



$\lim_{k \to -\infty} r = \infty$，$\lim_{k \to 0-0} r = \infty$ であり，r のとり得る値の範囲は

$$r > 0$$

である．