

複素数  $z$  が  $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$  かつ  $z \neq 0$  をみたしながら動くとき、点  $\frac{1}{z}$  は複素数平面上でどのような図形をえがくか。

(17 東京女大 現代教養 (数理科学) 7)

【答】 点 1 を通り、実軸に垂直な直線

【解答】

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad z \neq 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$w = \frac{1}{z}$  とおく。  $w$  のえがく図形は「 $\textcircled{1}$ かつ $\textcircled{2}$ 」を満たす  $z$  が存在するような点  $w$  の集合である。

$$w = \frac{1}{z} \iff zw = 1$$

$\textcircled{2}$ はつねに成り立つ。このとき  $w \neq 0$  でもあるから

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff \left|\frac{1}{w} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \\ &\iff |2 - w| = |w| \end{aligned}$$

これより、点  $w$ 、すなわち、点  $\frac{1}{z}$  は複素数平面上で 2 点 0, 2 を両端とする線分の垂直二等分線をえがく。これは

点 1 を通り、実軸に垂直な直線 ……(答)  
でもある。図示すると右図の太線となる。

