複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ は正三角形 ABC をなし，$\alpha\beta\gamma = -1$ をみたしている．$\triangle$ABC の重心 $\mathrm{D}(\delta)$ が実軸上にあり $\delta > -1$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，複素数平面上で複素数 z を表す点 P を $\mathrm{P}(z)$ と書く．

(1) $\triangle$ABC の外接円の半径 ℓ を δ の式で表せ．

(2) α, β, γ を δ の式でそれぞれ表せ．ただし，$-\pi \leqq \arg\alpha < \arg\beta < \arg\gamma < \pi$ とする．ここで $\arg z$ は複素数 z の偏角を表す．

(17 東京慈恵医大 4)

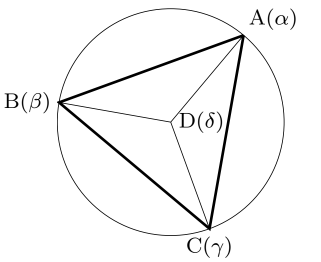
【答】

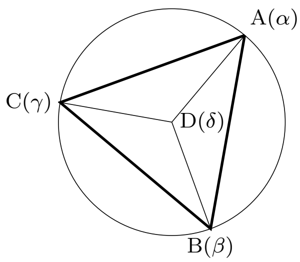
(1) $\ell = \sqrt[3]{1+\delta^3}$

(2) $\alpha = \delta - \sqrt[3]{1+\delta^3}$, $\beta = \delta + \dfrac{\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2}i$, $\gamma = \delta + \dfrac{\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2}i$

【解答】

(1) 正三角形 ABC は反時計回り，時計回りの 2 通りが考えられる．





正三角形の外心は重心と一致するから，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ を D のまわりに $\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{4\pi}{3}$ 回転させると $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ (または $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$) が得られる．

$\omega = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$，$z = \alpha - \delta$ とおくと，$\beta - \delta$, $\gamma - \delta$ は

$$z\omega,\ z\omega^2 \quad (\text{または } z\omega^2,\ z\omega)$$

であるから，3 点 A，B，C は

$$z+\delta,\ z\omega+\delta,\ z\omega^2+\delta \quad (\text{または } z+\delta,\ z\omega^2+\delta,\ z\omega+\delta)$$

と表される．

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2+\omega+1 = 0$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
\alpha\beta\gamma &= (z+\delta)(z\omega+\delta)(z\omega^2+\delta) \\
&= \delta^3 + (z+z\omega+z\omega^2)\delta^2 + (z\cdot z\omega + z\omega\cdot z\omega^2 + z\omega^2\cdot z)\delta + z\cdot z\omega\cdot z\omega^2 \\
&= \delta^3 + 0\cdot z\delta^2 + 0\cdot\omega z^2\delta + 1\cdot z^3 \\
&= \delta^3 + z^3
\end{aligned}$$

であるから

$$\alpha\beta\gamma = -1 \iff \delta^3 + z^3 = -1$$
$$\therefore \quad z^3 = -1 - \delta^3$$

△ABC の外接円の半径 ℓ は $|z|$ である．δ は実数で $\delta > -1$ を満たすから，$-1-\delta^3 < 0$ である．よって

$$\ell = |z| = \boldsymbol{\sqrt[3]{1+\delta^3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) z は $z^3 = -l^3$ の解であり

$$(z+l)(z^2 - lz + l^2) = 0$$
$$\therefore \quad z = -l,\ \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4l^2}}{2}$$
$$= -l,\ \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}l$$
$$= -l,\ -\omega l,\ -\omega^2 l$$

A は $z+\delta$ と表され，B，C は $z\omega+\delta,\ z\omega^2+\delta$ (または $z\omega^2+\delta,\ z\omega+\delta$) である．

$z+\delta,\ z\omega+\delta,\ z\omega^2+\delta$ の値は

$z=-l$ のとき，順に $-l+\delta,\ -\omega l+\delta,\ -\omega^2 l+\delta$

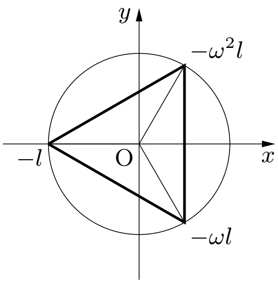
$z=-\omega l$ のとき，順に $-\omega l+\delta,\ -\omega^2 l+\delta,\ -l+\delta$

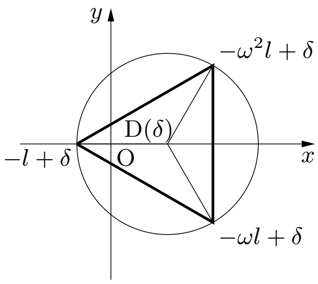
$z=-\omega^2 l$ のとき，順に $-\omega^2 l+\delta,\ -l+\delta,\ -\omega l+\delta$

いずれのときも 3 点表す複素数は

$$-l+\delta,\ -\omega l+\delta,\ -\omega^2 l+\delta$$

である．$-l,\ -\omega l,\ -\omega^2 l$ は左図の 3 点であり，δ だけ平行移動すると，題意の 3 点を得る．$-l+\delta = -\sqrt[3]{1+\delta^3}+\delta < 0$ に注意すると，題意の 3 点は右図の位置にある．





$-\pi \leqq \arg\alpha < \arg\beta < \arg\gamma < \pi$ より

$$\alpha = -l+\delta,\ \beta = -\omega l+\delta,\ \gamma = -\omega^2 l+\delta$$

である．よって，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を δ の式でそれぞれ表すと

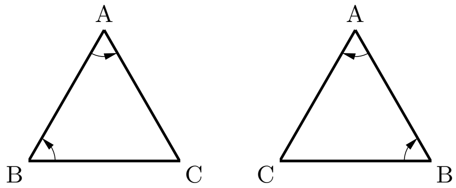
$$\alpha = \delta - \sqrt[3]{1+\delta^3},\ \beta = \delta - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{1+\delta^3},\ \gamma = \delta - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{1+\delta^3}$$

すなわち

$$\alpha = \boldsymbol{\delta - \sqrt[3]{1+\delta^3}}, \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$\beta = \boldsymbol{\delta + \frac{\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2} - \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2}i}, \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$\gamma = \boldsymbol{\delta + \frac{\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{1+\delta^3}}{2}i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 下図いずれのときも



△ABC が正三角形である条件は

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\\
\iff &(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)\\
\iff &\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0\\
\iff &(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0 \qquad \cdots\cdots ㋐
\end{aligned}$$

$\delta=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ より，$\alpha+\beta+\gamma=3\delta$ ⋯⋯ ㋑ であり

$$㋐ \iff \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3}=3\delta^2 \qquad \cdots\cdots ㋒$$

また，$\alpha\beta\gamma=-1$ ⋯⋯ ㋓ でもある．㋑，㋒，㋓より，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は 3 次方程式

$$\begin{aligned}
&t^3-3\delta t^2+3\delta^2 t+1=0\\
\therefore\quad &(t-\delta)^3=-1-\delta^3
\end{aligned}$$

の解である．

正三角形の重心は外心でもあるから，$\ell=|t-\delta|$ である．$\delta>-1$ より $-1-\delta^3<0$ であることに注意すると

$$\ell=\sqrt[3]{1+\delta^3}$$

である．このとき，3 点を表す複素数は

$$(t-\delta)^3=-\ell^3$$

の解

$$t=-l+\delta,\ -\omega l+\delta,\ -\omega^2 l+\delta$$

ただし，$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$

である．これ以後は (2) の後半と同じである．