a，b は実数の定数で，$\cos a > 0$ とする．

(1) x の 2 次方程式 $x^2 - 2x\cos a\cos b + \cos^2 a = 0$ の解を極形式で表せ．

(2) x の 2 次方程式 $x^2\cos^2 a - 2x\cos a\cos b + 1 = 0$ の解を極形式で表せ．

(3) a，b が $-\dfrac{\pi}{3} \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{3}$，$0 \leqq b < 2\pi$ の範囲を動くとき，(1) の解がとり得る値全体の集合は，複素数平面上のある領域 S_1 になる．また，(2) の解がとり得る値全体の集合は，ある領域 S_2 になる．S_1 と S_2 を図示せよ．

(4) S_1，S_2 は (3) で定めた領域とする．2 つの複素数 α，β について，α が S_1 上，β が S_2 上を動くとき，$\alpha\beta$ がとり得る値全体の集合は，複素数平面上のある領域 S になる．S を図示せよ．

(17 東京理大 理 (応数・応物・応化)・薬 (生創薬) 2)

【答】

(1) $x = \cos a\{\cos(\pm b) + i\sin(\pm b)\}$　(複号同順)

(2) $x = \dfrac{1}{\cos a}\{\cos(\pm b) + i\sin(\pm b)\}$　(複号同順)

(3) 略

(4) 略

【解答】

(1) $$x^2 - 2x\cos a\cos b + \cos^2 a = 0$$

解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \cos a\cos b \pm \sqrt{\cos^2 a\cos^2 b - \cos^2 a} \\ &= \cos a\left(\cos b \pm \sqrt{-\sin^2 b}\right) \\ &= \cos a(\cos b \pm i\sin b) \end{aligned}$$

$\cos a > 0$ より，求める極形式は

$$\boldsymbol{x = \cos a\{\cos(\pm b) + i\sin(\pm b)\}} \quad \textbf{(複号同順)}$$ ……(答)

(2) $$x^2\cos^2 a - 2x\cos a\cos b + 1 = 0$$

解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos a\cos b \pm \sqrt{\cos^2 a\cos^2 b - \cos^2 a}}{\cos^2 a} \\ &= \frac{1}{\cos a}\left(\cos b \pm \sqrt{-\sin^2 b}\right) \\ &= \frac{1}{\cos a}(\cos b \pm i\sin b) \end{aligned}$$

$\cos a > 0$ より，求める極形式は

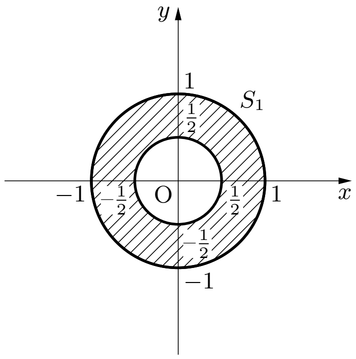
$$\boldsymbol{x = \frac{1}{\cos a}\{\cos(\pm b) + i\sin(\pm b)\}} \quad \textbf{(複号同順)}$$ ……(答)

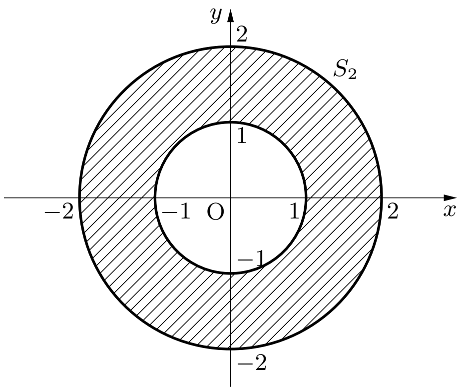
(3) a は $-\dfrac{\pi}{3} \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲を動くから

$$\frac{1}{2} \leqq \cos a \leqq 1,\ 1 \leqq \frac{1}{\cos a} \leqq 2$$

また，b は $0 \leqq b < 2\pi$ の範囲を動くから，$-b$ は $-2\pi < -b \leqq 0$ の範囲を動く．

a と b は独立に動くから，(1)，(2) の解が撮り得る値の集合 S_1，S_2 はそれぞれ下図の斜線部分である．境界も含む．





(4) α が S_1 上，β が S_2 上を動くから

$$\alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \left(\frac{1}{2} \leqq r_1 \leqq 1,\ 0 \leqq \theta_1 < 2\pi\right)$$
$$\beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \quad (1 \leqq r_2 \leqq 2,\ 0 \leqq \theta_2 < 2\pi)$$

とおくことができ

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}\end{aligned}$$

である．

$$\frac{1}{2} \leqq r_1r_2 \leqq 2,\ 0 \leqq \theta_1 + \theta_2 < 4\pi$$

より，$\alpha\beta$ が撮り得る値の集合 S は下図の斜線部分である．境界を含む．