複素数平面上に異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(1) があり，条件

$$\begin{cases} 3\alpha^2+\beta^2-6\alpha-2\beta+4=0 \\ \alpha\beta \fallingdotseq 0 \\ |\alpha-1|=1 \end{cases}$$

をみたしている．次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\beta-1}{\alpha-1}$ を求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(3) 3 点 C(1)，D$\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$，E$\left(\dfrac{1}{\beta}\right)$ が一直線上にあるとき，α を求めよ．

(17 横浜国大・後理工・都市科 3)

【答】

(1) $\pm\sqrt{3}i$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\alpha=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

【解答】

$$\begin{cases} 3\alpha^2+\beta^2-6\alpha-2\beta+4=0 & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta \fallingdotseq 0 & \cdots\cdots ② \\ |\alpha-1|=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

(1) ①の左辺を変形して

$$3(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=0$$

③より，$\alpha-1 \fallingdotseq 0$ であるから

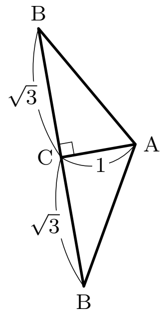
$$\left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}\right)^2=-3 \qquad \therefore \quad \frac{\beta-1}{\alpha-1}=\boldsymbol{\pm\sqrt{3}i} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より

$$\frac{\beta-1}{\alpha-1}=\sqrt{3}\{\cos(\pm\pi)+i\sin(\pm\pi)\} \quad (\text{複号同順})$$

$$\therefore \quad \left|\frac{\text{CB}}{\text{CA}}\right|=\sqrt{3}, \quad \angle\text{ACB}=\frac{\pi}{2}$$

③より，$\text{CA}=|\alpha-1|=1$ であり，$\text{CB}=\sqrt{3}\text{CA}=\sqrt{3}$ であるから，三角形 ABC は右図となる．



よって，三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\text{CA}\cdot\text{CB}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) 3 点 C(1)，D$\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$，E$\left(\dfrac{1}{\beta}\right)$ が一直線上にあるための条件は

$$\frac{\dfrac{1}{\beta}-1}{\dfrac{1}{\alpha}-1}\text{が実数である}\qquad\cdots\cdots(*)$$

ことである．

$$\frac{\dfrac{1}{\beta}-1}{\dfrac{1}{\alpha}-1}=\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}=\pm\frac{\sqrt{3}\alpha}{\beta}i$$

より

$$(*)\iff\frac{\alpha}{\beta}\text{が純虚数である}$$

$|\alpha-1|=1$ より

$$\alpha-1=\cos\theta+i\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$$

とおくことができ

$$\beta-1=\pm\sqrt{3}i(\alpha-1)=\mp\sqrt{3}\sin\theta\pm\sqrt{3}i\cos\theta\quad(\text{以下，複号同順とする})$$

すなわち

$$\alpha=1+\cos\theta+i\sin\theta$$
$$\beta=1\mp\sqrt{3}\sin\theta\pm\sqrt{3}i\cos\theta$$

とおくことができる．

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta}&=\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1\mp\sqrt{3}\sin\theta\pm\sqrt{3}i\cos\theta}\\&=\frac{(1+\cos\theta+i\sin\theta)(1\mp\sqrt{3}\sin\theta\mp\sqrt{3}i\cos\theta)}{(1\mp\sqrt{3}\sin\theta)^2+(\sqrt{3}\cos\theta)^2}\\&=\frac{(1+\cos\theta)(1\mp\sqrt{3}\sin\theta)\pm\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}{(1\mp\sqrt{3}\sin\theta)^2+(\sqrt{3}\cos\theta)^2}\\&\qquad+i\,\frac{\mp(1+\cos\theta)\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta(1\mp\sqrt{3}\sin\theta)}{(1\mp\sqrt{3}\sin\theta)^2+(\sqrt{3}\cos\theta)^2}\end{aligned}$$

$\dfrac{\alpha}{\beta}$ は純虚数だから

$$(1+\cos\theta)(1\mp\sqrt{3}\sin\theta)\pm\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=0$$
$$1\mp\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=0\qquad\cdots\cdots④$$

④を同値変形すると

$$\begin{aligned}④&\iff1+\cos\theta=\pm\sqrt{3}\sin\theta\\&\iff(1+\cos\theta)^2=3\sin^2\theta\end{aligned}$$

であり

$$(1+\cos\theta)^2=3(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)$$
$$(1+\cos\theta)(4\cos\theta-2)=0$$

である．$\cos\theta=-1$ とすると，$\theta=\pi$ であり $\sin\theta=0$，このときは $\alpha=0$ となり，②に反する．したがって，$\cos\theta\neq-1$ である．これより

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad\sin\theta=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\alpha=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$ ……(答)

- ④は合成を利用して解いてもよい．

$$\begin{aligned}④&\iff\mp\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=-1\\&\iff2\left\{\sin\theta\left(\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right\}=-1\\&\iff\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\ \text{または}\ \sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \text{または}\ \theta+\frac{5\pi}{6}=\frac{7\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}$$

$$\theta=\pi,\ \frac{5\pi}{3},\ \text{または}\ \theta=\frac{\pi}{3},\ \pi$$

$\theta=\pi$ のとき，$\alpha=1-1+0i=0$ であり，②に反するから

$$\theta=\frac{5\pi}{3}\ \text{または}\ \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\quad\alpha=1+\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$