z を複素数とする．$z+\dfrac{3}{z}$ が実数であり，$3 \leqq z+\dfrac{3}{z} \leqq 4$ となる z の動く範囲を複素数平面上に図示せよ．

(17 琉球大 理・工・医・教育 3)

【答】 略

【解答】

$z+\dfrac{3}{z}$ は実数であるから

$$\begin{aligned}\overline{z+\frac{3}{z}}=z+\frac{3}{z} &\iff \overline{z}+\frac{3}{\overline{z}}=z+\frac{3}{z}\\ &\iff \frac{(\overline{z}-z)(|z|^2-3)}{z\overline{z}}=0\\ &\iff (\overline{z}-z)(|z|^2-3)=0 \text{ かつ } z \fallingdotseq 0\\ &\iff \text{「}\overline{z}=z \text{ かつ } z \fallingdotseq 0\text{」または } |z|=\sqrt{3}\end{aligned}$$

(i)「$\overline{z}=z$ かつ $z \fallingdotseq 0$」のとき，z は 0 でない実数である．

$3 \leqq z+\dfrac{3}{z} \leqq 4$ …… ① が成り立つためには $z>0$ であることが必要である．このとき

$$\begin{aligned}&① \iff 3z \leqq z^2+3 \leqq 4z\\ &\quad\iff \begin{cases} z^2-3z+3 \geqq 0 & \cdots\cdots ② \\ z^2-4z+3 \leqq 0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}\end{aligned}$$

ここで，②は

$$z^2-3z+3=\left(z-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

であり，つねに成り立つ．③は

$$z^2-4z+3=(z-1)(z-3) \leqq 0 \qquad \therefore\quad 1 \leqq z \leqq 3$$

②，③を同時に満たす z は

$$1 \leqq z \leqq 3$$

これは，実軸上の 2 点 1 と 3 を結ぶ線分である．

(ii) $|z|=\sqrt{3}$ のとき，z は原点を中心とし，半径 $\sqrt{3}$ の円周上を動く．このとき

$$z=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta)\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

と表すことができる．

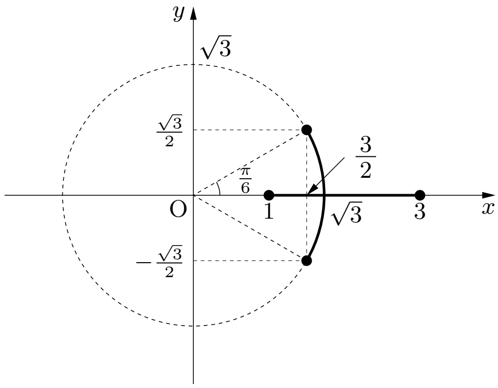
$$\begin{aligned}z+\frac{3}{z}&=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta)+\sqrt{3}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}\\ &=2\sqrt{3}\cos\theta\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}3 \leqq z+\frac{3}{z} \leqq 4 &\iff 3 \leqq 2\sqrt{3}\cos\theta \leqq 4 \text{ (第 2 の不等式はつねに成立する)}\\ &\iff \frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi$$

(i)，(ii) より，z の動く範囲は下図の実線部分となる．



- (ii) については次のようにしてもよい.

  $z = x + yi$ ($x,\ y$ は実数) とおくと $|z|^2 = 3$ より

$$x^2 + y^2 = 3 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

である. また, $z\overline{z} = |z|^2 = 3$ より

$$z + \frac{3}{z} = z + \overline{z} = 2x$$

であり

$$3 \leqq z + \frac{3}{z} \leqq 4 \iff 3 \leqq 2x \leqq 4$$

$$\therefore \quad \frac{3}{2} \leqq x \leqq 2 \qquad \cdots\cdots ㋑$$

よって, z は「㋐かつ㋑」, すなわち, 円 $|z| = \sqrt{3}$ の実部が $x \geqq \dfrac{3}{2}$ である部分を動く.