虚部が 0 でない複素数 z について，$z+\dfrac{2}{z}$ が実数となるとき，$|z|=\boxed{\text{(3)}}$ である．この複素数 z がさらに $|z+i|=2$ をみたすとき，$z=\boxed{\text{(4)}}$ である．ただし，i は虚数単位とする．

(17 福岡大 工 2(2))

【答】

(3)	(4)
$\sqrt{2}$	$\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

【解答】

$z+\dfrac{2}{z}$ は実数だから

$$z+\frac{2}{z}=\overline{z+\frac{2}{z}} \iff z+\frac{2}{z}=\overline{z}+\frac{2}{\overline{z}} \qquad \cdots\cdots ①$$

$z\fallingdotseq 0$ より，$z\overline{z}=|z|^2\fallingdotseq 0$ であり

$$① \iff z|z|^2+2\overline{z}=\overline{z}|z|^2+2z$$

整理して

$$|z|^2(z-\overline{z})-2(z-\overline{z})=0$$
$$(|z|^2-2)(z-\overline{z})=0$$

$z-\overline{z}=0$ とすると，z は実数であり，これは z の虚部が 0 でないことに反するから，$z-\overline{z}\fallingdotseq 0$ である．

したがって，$|z|^2=2$，すなわち，$|z|=\boxed{\sqrt{2}}$ である． $\cdots\cdots$ ((3) の答)

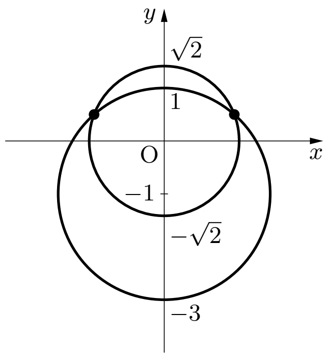
このとき

$$z=\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta) \quad (\sin\theta\fallingdotseq 0)$$

とおけて

$$z+i=\sqrt{2}\cos\theta+i(\sqrt{2}\sin\theta+1)$$

であるから



$$|z+i|=2$$
$$2\cos^2\theta+(\sqrt{2}\sin\theta+1)^2=4$$
$$2\sqrt{2}\sin\theta=1$$
$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\therefore\quad \cos\theta=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$$

よって，$z=\boxed{\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}+\dfrac{1}{2}i}$ $\cdots\cdots$ ((4) の答)

- $z=x+yi$ ($x,\ y$ は実数, $y \fallingdotseq 0$) とおくと

$$\begin{aligned} z+\frac{2}{z} &= (x+yi)+\frac{2}{x+yi} \\ &= (x+yi)+\frac{2(x-yi)}{x^2+y^2} \\ &= x+\frac{2x}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{2y}{x^2+y^2}\right)i \end{aligned}$$

であるから

$$z+\frac{2}{z}\text{が実数である} \iff y-\frac{2y}{x^2+y^2}=0 \iff \frac{y(x^2+y^2-2)}{x^2+y^2}=0$$

$y \fallingdotseq 0$ より

$$x^2+y^2-2=0 \qquad \cdots\cdots \text{㋐}$$

よって

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$$

である．この複素数 z がさらに $|z+i|=2$ を満たすから

$$\begin{aligned} |x+(y+1)i|=2 &\iff x^2+(y+1)^2=4 \\ &\iff x^2+y^2+2y=3 \qquad \cdots\cdots \text{㋑} \end{aligned}$$

したがって

$$\text{「㋐かつ㋑」} \iff \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 2+2y=3 \end{cases}$$

$$\therefore \quad y=\frac{1}{2},\ x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

よって

$$z=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}i$$

である．