

i を虚数単位とする. $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とするとき, $\omega^4 + 2\omega^3 - \omega^2$ の値を求めなさい.

(17 福島大 人文社会 1(1))

【答】 $2 + \sqrt{3}i$

【解答】

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ のとき, $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ であり, ド・モアブルの定理より

$$\omega^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

である. したがって, $\omega^3 - 1 = 0$ である.

$\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1)$ かつ $\omega \neq 1$ より

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

でもある. これより

$$\begin{aligned} \omega^4 + 2\omega^3 - \omega^2 &= \omega \cdot \omega^3 + 2\omega^3 - (-\omega - 1) \\ &= \omega + 2 + (\omega + 1) \\ &= 2\omega + 3 \\ &= 2 \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + 3 \\ &= 2 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

……(答)

である.