$z^3 = i$ を満たす z をすべて求め，複素数平面上に図示しなさい．

(17 福島大 人文社会 8(3))

【答】 $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i,\ -i$，図は略

【解答】

$$z^3 = i \qquad \cdots\cdots (*)$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくことができる．このとき

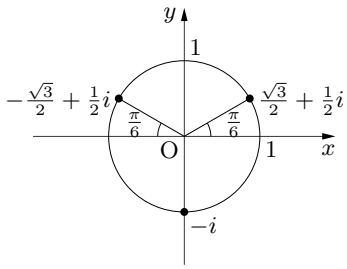
$$(*) \iff r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{2},\ 2\pi + \dfrac{\pi}{2},\ 4\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2}$$

よって，求める z は

$$z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6},\ \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi,\ \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．これを複素数平面上に図示すると，下図の黒丸となる．