

2つの複素数 $\alpha = i$, $z = 1 - \sqrt{3}i$ について、次の問いに答えなさい。

(1) z を極形式で表しなさい。

(2) 以下の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に入る値を求めなさい。

z は α を原点を中心として $\boxed{\text{ア}}$ だけ回転し、原点からの距離を $\boxed{\text{イ}}$ 倍したものである。

(3) z^n が正の実数となる最小の自然数を n とする。このとき、 n および z^n の絶対値を求めなさい。

(17 福島大 後 理工 2)

【答】	ア	イ
	$\frac{7}{6}\pi$	2

【解答】

(1) $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ より

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left\{ \cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{3} \right) \right\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ より、 z は α を

$$\text{原点を中心として } \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{7}{6}\pi \text{ だけ回転し,} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\text{原点からの距離を } 2 \text{ 倍} \quad \dots\dots(\text{答})$$

したものである。

- (1) において、 $z = 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}$ としたときは、回転の向きに注意する。このとき、 z は α を

$$\text{原点を中心として } -\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{5}{6}\pi \text{ だけ回転し,} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\text{原点からの距離を } 2 \text{ 倍} \quad \dots\dots(\text{答})$$

したものである。

(3) ド・モアブルの定理より

$$z^n = 2^n \left\{ \cos \left(-\frac{n\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{n\pi}{3} \right) \right\}$$

これが正の実数となる最小の自然数 n は、 $n = 6$ である。 $\dots\dots(\text{答})$

このとき、 z^6 の絶対値は

$$|z^6| = |z|^6 = 2^6 = 64 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。