$A = \dfrac{1}{1-\alpha} + \dfrac{1}{1-\alpha^2} + \dfrac{1}{1-\alpha^3} + \dfrac{1}{1-\alpha^4} + \dfrac{1}{1-\alpha^5} + \dfrac{1}{1-\alpha^6}$ とする．

$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ であるとき，A の値を求めよ．

㋐ 0　㋑ 1　㋒ 2　㋓ 3　㋔ 4　㋕ 5　㋖ 6　㋗ 7　㋘ 8　㋙ 9

(17 自治医大 7)

【答】 ㋓

【解答】

$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ であるとき

$$\alpha^7 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

であるから

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4} + \frac{1}{1-\alpha^5} + \frac{1}{1-\alpha^6} \\
&= \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha^3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha^2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{\alpha^3}{\alpha^3-1} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} + \frac{\alpha}{\alpha-1} \\
&= \frac{1-\alpha}{1-\alpha} + \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^3} \\
&= \mathbf{3}
\end{aligned}$$

……(答)