t を実数の定数とし，i を虚数単位とする．3 つの複素数 α, β, γ を

$$\alpha = t + 2i, \quad \beta = (3t+4) + (t^2+6)i, \quad \gamma = (t+2) + 5i$$

とする．複素数平面上の 3 点 α, β, γ が同一直線上にあるときの t をすべて求めよ．

(17 茨城大 工 5(3))

【答】 $t = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

【解答】

3 点 α, β, γ が同一直線上にあるための条件は

$$\beta - \alpha = s(\gamma - \alpha) \qquad \cdots\cdots ①$$

をみたす実数 s が存在することである．

$$\alpha = t + 2i,$$
$$\beta = (3t+4) + (t^2+6)i,$$
$$\gamma = (t+2) + 5i$$

を①に代入すると

$$2t + 4 + (t^2+4)i = s(2+3i)$$

s, t は実数だから，実部，虚部を比較して

$$\begin{cases} 2t + 4 = 2s \\ t^2 + 4 = 3s \end{cases}$$

$s = t + 2$ より

$$t^2 + 4 = 3(t+2) \qquad \therefore \quad t^2 - 3t - 2 = 0$$

これを解いて

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}, \ s = t + 2 = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2} \quad (\text{複号同順})$$

よって

$$\boldsymbol{t = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 複素数 α, β, γ を表す点をそれぞれ A, B, C とすると

$$3 \text{ 点} \alpha, \ \beta, \ \gamma \text{が同一直線上にある}$$
$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AC}} \iff \begin{pmatrix} 2t+4 \\ t^2+4 \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\therefore \quad (2t+4) : (t^2+4) = 2 : 3$$
$$\therefore \quad 2(t^2+4) = 3(2t+4)$$
$$\therefore \quad t^2 - 3t - 2 = 0$$
$$\therefore \quad t = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

- 3 点 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が同一直線上にあるための条件は

  $$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\text{ が実数である}$$

  ことでもある．

  $$\begin{aligned}\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} &= \frac{2t+4+(t^2+4)i}{2+3i} \\ &= \frac{\{2t+4+(t^2+4)i\}(2-3i)}{4+9} \\ &= \frac{3t^2+4t+20+2(t^2-3t-2)i}{13}\end{aligned}$$

  より，求める t は

  $$t^2-3t-2=0 \qquad \therefore\quad t=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$