$f(x)=8x^3-6x+1$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}\right)=0$ を示せ．

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつことを示し，これらのうちで最大のものが $x=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ であることを示せ．

(3) 不等式 $\cos\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}<\cos\dfrac{2\pi}{9}$ が成り立つことを示せ．

(4) 複素数 $z=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{7}}{4}i$ に対し，z^n の実部が正で虚部が負となり，かつ，z^{n+1} の実部と虚部がどちらも正となるような自然数 n のうち，最小のものを求めよ．

(17 金沢大 後 理工 (数物・電情・機械) 2)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) $n=8$

【解答】

(1) 3 倍角の公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ において，$\theta=\dfrac{2\pi}{9}$ とおくと

$$\cos\frac{2\pi}{3}=4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9}$$

$\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$ より

$$4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad 8\cos^3\frac{2\pi}{9}-6\cos\frac{2\pi}{9}+1=0$$

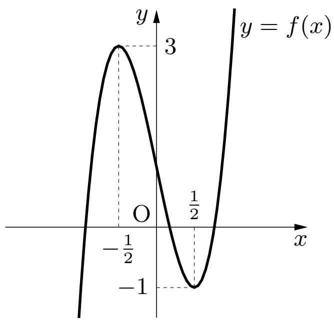
$f(x)=8x^3-6x+1$ より，$f\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}\right)=0$ である．　…… (証明終わり)

(2) $f(x)$ を微分して

$$f'(x)=24x^2-6=6(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

極大値 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3$，　極小値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$



$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつ．　…… (証明終わり)

グラフより，3 つの解のうち最大なものは $\dfrac{1}{2}$ より大きい．(1) より $x=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は解の 1 つであるが，この値は $\cos\dfrac{2\pi}{9}>\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ である．

よって，$f(x)=0$ の 3 解のうちで最大のものは $x=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ である．　…… (証明終わり)

(3) $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=8\left(\dfrac{3}{4}\right)^3-6\cdot\dfrac{3}{4}+1=-\dfrac{1}{8}<0$ だから，(2) のグラフより

$$\frac{3}{4}<\cos\frac{2\pi}{9} \qquad \cdots\cdots ①$$

また

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4}<\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ②より

$$\cos\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}<\cos\frac{2\pi}{9} \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

(4) $z=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{7}}{4}i$ のとき，$|z|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=1$ だから

$$z=\cos\alpha+i\sin\alpha \quad \left(\cos\alpha=\frac{3}{4},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \qquad \cdots\cdots ③$$

と表すことができる．ド・モアブルの定理から

$$z^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$
$$z^{n+1}=\cos(n+1)\alpha+i\sin(n+1)\alpha$$

であり，与えられた条件は

$$\begin{cases}\cos n\alpha>0\\ \sin n\alpha<0\end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases}\cos(n+1)\alpha>0\\ \sin(n+1)\alpha>0\end{cases} \qquad \cdots\cdots(*)$$

である．$(*)$ を満たす最小な自然数 n を求める．すなわち

$$2m\pi-\frac{\pi}{2}<n\alpha<2m\pi \quad \text{かつ} \quad 2m\pi<(n+1)\alpha<2m\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots(*)'$$

を満たす自然数 m が存在するような n の最小値を求める．

③より α は第 1 象限の角としてよく，$\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$ かつ (3) より

$$\cos\frac{\pi}{4}<\cos\alpha<\cos\frac{2\pi}{9}$$

であるから

$$\frac{2\pi}{9}<\alpha<\frac{\pi}{4} \qquad \cdots\cdots ④$$

としてよい．$(*)'$ より $n\alpha<2m\pi<(n+1)\alpha$ が必要である．α について整理すると

$$\frac{2m\pi}{n+1}<\alpha<\frac{2m\pi}{n} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．④かつ⑤を満たす α が存在する条件は

$$\begin{cases}\dfrac{2m\pi}{n+1}<\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{2\pi}{9}<\dfrac{2m\pi}{n}\end{cases} \qquad \therefore \quad 8m-1<n<9m$$

である．$m,\ n$ は自然数であり，$m=1$ とすると

$$7<n<9 \qquad \therefore \quad n=8$$

$(m,\ n)=(1,\ 8)$ のとき，④より $\dfrac{16\pi}{9}<8\alpha<2\pi,\ 2\pi<9\alpha<\dfrac{9\pi}{4}$ である．さらに，$\dfrac{3\pi}{2}<\dfrac{16\pi}{9},\ \dfrac{9\pi}{4}<\dfrac{5\pi}{2}$ であるから，$(*)'$ を満たす．

$(*)'$ を満たす最小な自然数 m に対応する n は $(*)'$ を満たす最小な自然数であるから，求める n の最小値は $\boldsymbol{n=8}$ ……(答)