n を 2 以上の自然数とし，$z=\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n}$ とする．ただし，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位である．次の問いに答えよ．

(1) z^n と $w=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)$ のそれぞれの値を求めよ．

(2) 等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{a_n}$ を満たす実数 a_n を $\cos\dfrac{\pi}{n}$ を用いて表せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2a_n$ を求めよ．

(17 関西大 シス・環境・化生 2 月 2 日 3)

【答】

(1) $z^n=-1$，$w=-2$

(2) $a_n=1-\cos\dfrac{\pi}{n}$

(3) $\dfrac{\pi^2}{2}$

【解答】

(1) ド・モアブルの定理より

$$z^n=\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^n=\cos\pi+i\sin\pi=\mathbf{-1}\qquad\cdots\cdots ①\qquad\cdots\cdots(答)$$

w については，等比数列の公式を用いる．$z\fallingdotseq 1$ より

$$\begin{aligned}w&=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)\\&=(z-1)\cdot\frac{1-z^n}{1-z}\\&=z^n-1\\&=\mathbf{-2}\qquad(\because ①)\qquad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

(2) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ のとき，ド・モアブルの定理より $z^k=\cos\dfrac{k\pi}{n}+i\sin\dfrac{k\pi}{n}$ であるから，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$ は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}z^k$ の虚部である．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}z^k&=z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{w}{z-1}-1=\frac{-2-(z-1)}{z-1}\qquad(\because (1))\\&=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{(1-z)(1-\overline{z})}=\frac{1+z-\overline{z}-z\overline{z}}{1-z-\overline{z}+z\overline{z}}\\&=\frac{1+2i\sin\frac{\pi}{n}-1}{1-2\cos\frac{\pi}{n}+1}\\&=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}i\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}$$

であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{a_n}$ を満たす実数 a_n は

$$a_n = \mathbf{1 - \cos \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (2) から

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^2 a_n &= \lim_{n\to\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)\left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right)}{1 + \cos \frac{\pi}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \cdot \frac{n^2}{1 + \cos \frac{\pi}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{1 + \cos \frac{\pi}{n}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

- $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ を導くために半角の公式を用いてもよい．

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^2 a_n &= \lim_{n\to\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot 2\sin^2 \frac{\pi}{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \cdot 2n^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{2} \\
&= \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$