複素数平面において 2 点 A$(1+i)$, B$(5+3i)$ をとる．三角形 ABC が正三角形となる点 C に対応する複素数で虚部が最大のものは $3-\sqrt{3}+i\left(\boxed{①}\right)$ である．

(17 年 関西大 全学部日程 理系 2 月 7 日実施 4(1))

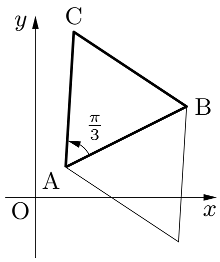
①
$2+2\sqrt{3}$

【チェック・チェック】

複素数平面上で回転移動を扱う問題として正三角形，直角三角形は絶好の素材です．教科書の例題レベルの問題ですが，今一度確認しておきましょう．

【解答】

$\alpha=1+i$，$\beta=5+3i$ とおく．△ABC が正三角形となる C に対応する複素数で虚部が最大のものは，B を A のまわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である．このときの C を γ とすると



$$\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\beta-\alpha)$$

← $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\frac{\pi}{3}$ 回転させたものである．チェクリピ 58

である．よって

$$\begin{aligned}\gamma&=(1+i)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4+2i)\\&=1+i+(2-\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i\\&=3-\sqrt{3}+i\left(\boxed{2+2\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

…… (①の答)

← 実部が与えられているので，検算のチェックとなる．

である．