自然数 n に対して，条件

$$|x+y| \leqq n \text{ かつ } |x-y| \leqq n$$

をみたす整数 $x,\ y$ の組の個数を a_n とする．

(1) a_4 を求めよ．

(2) a_n を n の式で表せ．

この問題については，解答用紙 (省略) の所定の欄に答えだけを書くこと．

(17 学習院大 法 1)

【答】

(1) $a_4 = 41$

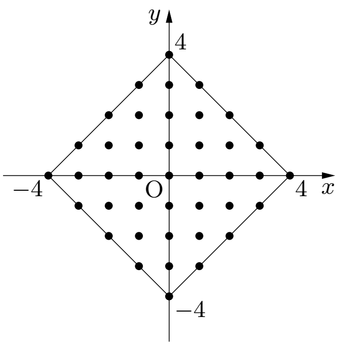
(2) $a_n = 2n^2 + 2n + 1$

【解答】

条件

$$\begin{cases} |x+y| \leqq n \\ |x-y| \leqq n \end{cases}$$

を満たす整数 $x,\ y$ の組は，座標平面上で 4 点 $(\pm n,\ 0)$，$(0,\ \pm n)$ を結んだ正方形の周および内部にある格子点である．



(1) $n=4$ のとき，条件を満たす格子点は右図の黒丸である．

$x = k\ (k=-4,\ -3,\ \cdots,\ 3,\ 4)$ 上の格子点を順に数えていくと

$$\begin{aligned} a_4 &= (1+3+5+7)+9+(7+5+3+1) \\ &= \mathbf{41} \end{aligned}$$

……(答)

(2) (1) と同様に，$x=k\ (-n \leqq k \leqq n)$ 上の格子点を順に数えていくと

$$\begin{aligned} a_n &= \{1+3+\cdots+(2n-1)\}+(2n+1)+\{(2n-1)+\cdots+3+1\} \\ &= n^2+(2n+1)+n^2 \\ &= \mathbf{2n^2+2n+1} \end{aligned}$$

……(答)

- 4 点 $(\pm(n+1),\ 0)$，$(0,\ \pm(n+1))$ を結んだ正方形の周上にある格子点の個数は

  $$a_{n+1} - a_n = 4(n+1) \quad (n \geqq 0)$$

  であるから，$n \geqq 1$ のとき

  $$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 4(k+1) = 1 + 4 \cdot \frac{n(1+n)}{2} = 2n^2+2n+1$$

  これは $n=0$ のときも成り立つ．

  よって　$a_n = 2n^2+2n+1 \quad (n \geqq 0)$