次の問いに答えなさい．

(1) p を実数の定数とするとき，数列 $\{n^p\}$ (n は自然数) の和を

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

とおく．

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad \cdots\cdots ①$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad \cdots\cdots ②$$

$$S_3(n) = \frac{1}{\boxed{ア}}n^4 + \frac{1}{\boxed{イ}}n^3 + \frac{1}{\boxed{ウ}}n^2 \quad \cdots\cdots ③$$

である．次の方法で $S_4(n)$ を求める．

二項定理から

$$(k+1)^5 - k^5 = \boxed{エ}k^4 + \boxed{オカ}k^3 + \boxed{オカ}k^2 + \boxed{エ}k + 1$$

である．この式の k に 1 から n までを代入して得られる n 個の式の辺々をそれぞれ加えると

$$(n+1)^5 - 1^5 = \boxed{エ}S_4(n) + \boxed{オカ}S_3(n) + \boxed{オカ}S_2(n) + \boxed{エ}S_1(n) + n$$

となる．①, ②, ③より

$$S_4(n) = \frac{1}{\boxed{キ}}n^5 + \frac{1}{\boxed{ク}}n^4 + \frac{1}{\boxed{ケ}}n^3 - \frac{1}{\boxed{コサ}}n$$

となる．

(2) n を 2 以上の整数とする．1^2 から n^2 までの異なる n 個の平方数 (整数を 2 乗した数) 1, 4, 9, 16, 25, $\cdots$, n^2 の中から異なる 2 個の数を取り出してつくった積すべての和を T とする．

(1) の $S_p(n)$ を用いると

$$T = \frac{1}{\boxed{シ}}\left[\left\{S_{\boxed{ス}}(n)\right\}^{\boxed{セ}} - S_{\boxed{ソ}}(n)\right]$$

$$= \frac{1}{18}n^6 + \frac{1}{\boxed{タチ}}n^5 - \frac{5}{\boxed{ツテ}}n^4 - \frac{1}{\boxed{トナ}}n^3 + \frac{1}{72}n^2 + \frac{1}{60}n$$

である．

(17 獨協医大 医 4)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オカ	キ	ク	ケ	コサ	シ	ス	セ	ソ	タチ	ツテ
4	2	4	5	10	5	2	3	30	2	2	2	4	15	72

トナ
12

【解答】

(1) まずは

$$S_1(n)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n \qquad \cdots\cdots ①$$

$$S_2(n)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．さらに，公式より

$$\begin{aligned}S_3(n)&=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\\&=\frac{1}{\boxed{4}}n^4+\frac{1}{\boxed{2}}n^3+\frac{1}{\boxed{4}}n^2 \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (ア〜ウの答)

次に，二項定理から

$$\begin{aligned}(k+1)^5-k^5&=({}_5\mathrm{C}_0k^5+{}_5\mathrm{C}_1k^4+{}_5\mathrm{C}_2k^3+{}_5\mathrm{C}_3k^2+{}_5\mathrm{C}_4k+{}_5\mathrm{C}_5)-k^5\\&=\boxed{5}k^4+\boxed{10}k^3+10k^2+5k+1\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (エ〜カの答)

この式の k に 1 から n までを代入して得られる n 個の式の辺々をそれぞれ加えると

$$(\text{左辺})=\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^5-k^5\right\}=(n+1)^5-1^5$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)\\&=5S_4(n)+10S_3(n)+10S_2(n)+5S_1(n)+n\end{aligned}$$

したがって

$$(n+1)^5-1^5=5S_4(n)+10S_3(n)+10S_2(n)+5S_1(n)+n \qquad \cdots\cdots ④$$

となる．④の左辺は，二項定理から

$$\begin{aligned}&(n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)-1\\=&n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n \qquad \cdots\cdots ⑤\end{aligned}$$

となり，④の右辺は，①，②，③より

$$\begin{aligned}&5S_4(n)+10\left(\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\right)\\&\qquad+10\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)+5\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)+n\\=&5S_4(n)+\frac{5}{2}n^4+\frac{25}{3}n^3+10n^2+\frac{31}{6}n \qquad \cdots\cdots ⑥\end{aligned}$$

となるので，⑤ $=$ ⑥ を変形することにより

$$\begin{aligned}&S_4(n)\\=&\frac{1}{5}\left\{(n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n)-\left(\frac{5}{2}n^4+\frac{25}{3}n^3+10n^2+\frac{31}{6}n\right)\right\}\\=&\frac{1}{\boxed{5}}n^5+\frac{1}{\boxed{2}}n^4+\frac{1}{\boxed{3}}n^3-\frac{1}{\boxed{30}}n\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (キ〜サの答)

となる．

(2) $(1^2+2^2+\cdots n^2)^2 = 1^4+2^4+\cdots+n^4+2T$ より

$$T = \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^4\right\}$$

であるから

$$T = \frac{1}{\boxed{2}}\left\{\left(S_{\boxed{2}}(n)\right)^{\boxed{2}} - S_{\boxed{4}}(n)\right\} \quad \cdots\cdots \text{(シ〜ソの答)}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)^2 - \left(\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{9}n^6+\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{36}n^2+\frac{1}{3}n^5+\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{9}n^4 - \left(\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{18}n^6+\frac{1}{\boxed{15}}n^5-\frac{5}{\boxed{72}}n^4-\frac{1}{\boxed{12}}n^3+\frac{1}{72}n^2+\frac{1}{60}n \quad \cdots\cdots \text{(タ〜ナの答)}$$

である.