以下において考察する数列の項は，すべて実数であるとする．

(1) 等比数列 $\{s_n\}$ の初項が 1, 公比が 2 であるとき

$$s_1s_2s_3 = \boxed{\text{ア}}, \quad s_1+s_2+s_3 = \boxed{\text{イ}}$$

である．

(2) $\{s_n\}$ を初項 x，公比 r の等比数列とする．a, b を実数（ただし $a \neq 0$）とし，$\{s_n\}$ の最初の 3 項が

$$s_1s_2s_3 = a^3 \quad \cdots\cdots ①$$

$$s_1+s_2+s_3 = b \quad \cdots\cdots ②$$

を満たすとする．このとき

$$xr = \boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots ③$$

である．さらに②，③を用いて r, a, b の満たす関係式を求めると

$$\boxed{\text{エ}}\,r^2 + \left(\boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\right)r + \boxed{\text{キ}} = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

を得る．④を満たす実数 r が存在するので

$$\boxed{\text{ク}}\,a^2 + \boxed{\text{ケ}}\,ab - b^2 \leqq 0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

である．

逆に a, b が⑤を満たすとき，③，④を用いて r, x の値を求めることができる．

(3) $a = 64$, $b = 336$ のとき，(2) の条件①，②を満たし，公比が 1 より大きい等比数列 $\{s_n\}$ を考える．③, ④ を用いて $\{s_n\}$ の公比 r と初項 x を求めると，$r = \boxed{\text{コ}}$, $x = \boxed{\text{サシ}}$ である．

$\{s_n\}$ を用いて，数列 $\{t_n\}$ を

$$t_n = s_n \log_{\boxed{\text{コ}}} s_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．このとき，$\{t_n\}$ の一般項は $t_n = \left(n + \boxed{\text{ス}}\right)\cdot \boxed{\text{コ}}^{\,n+\boxed{\text{セ}}}$ である．

$\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n は，$U_n - \boxed{\text{コ}}\,U_n$ を計算することにより

$$U_n = \frac{\boxed{\text{ソ}}\,n + \boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \cdot \boxed{\text{コ}}^{\,n+\boxed{\text{ツ}}} - \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

であることがわかる．

(17 年 センター本試験 II・B 第 3 問)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サシ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
8	7	a	a	a	b	a	3	2	4	16	1	1	3	2	9	2

テト	ナ
32	9

【チェック・チェック】

連立方程式 {①, ②} を満たす x, r は a, b で表すことができます．ただし，x, r が実数ということより，a, b には条件がつきます．この条件が式⑤です．

$\sum$(等差)(等比) の計算では「公比倍して，ひく」が定型です．$U_n - \boxed{\text{コ}}\, U_n$ がこの誘導になっています．

【解答】

(1) 等比数列 $\{s_n\}$ の初項が 1, 公比が 2 であるとき

$$s_1 s_2 s_3 = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 = \boxed{\mathbf{8}} \qquad \cdots\cdots \text{(アの答)}$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = 1 + 2 + 2^2 = \boxed{\mathbf{7}} \qquad \cdots\cdots \text{(イの答)}$$

である．

←― 等比数列の定義の確認です．

(2) $\{s_n\}$ は初項 x，公比 r の等比数列であるから

$$① \iff x \cdot xr \cdot xr^2 = a^3 \iff (xr)^3 = a^3 \qquad \cdots\cdots ①'$$

$$② \iff x + xr + xr^2 = b \iff x(1 + r + r^2) = b \qquad \cdots\cdots ②'$$

である．①$'$ かつ xr は実数より

$$xr = \boxed{a} \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots \text{(ウの答)}$$

である．$a \fallingdotseq 0$ より $r \fallingdotseq 0$ であり，②$'$，③より x を消去すると

$$\frac{a}{r}(1 + r + r^2) = b$$

$$\boxed{a}\, r^2 + \left(\boxed{a} - \boxed{b}\right) r + \boxed{a} = 0 \qquad \cdots\cdots ④$$

$$\cdots\cdots \text{(エ〜キの答)}$$

を得る．④を満たす実数 r が存在するので

$$\text{(判別式)} \geqq 0 \iff (a - b)^2 - 4a \cdot a \geqq 0$$

$$\iff -3a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathbf{3}}\, a^2 + \boxed{\mathbf{2}}\, ab - b^2 \leqq 0 \cdots\cdots ⑤ \qquad \cdots\cdots \text{(ク，ケの答)}$$

である．

←― r についての 2 次方程式④が実数解をもつ条件は
(判別式) $\geqq 0$
である．

逆に a，b が⑤を満たすとき，③，④を用いて r, x の値を求めることができる．

(3) $a = 64$，$b = 336$ のとき，

$$④ \iff 64r^2 + (64 - 336)r + 64 = 0$$

$$\iff 4r^2 - 17r + 4 = 0$$

$$\iff (4r - 1)(r - 4) = 0$$

$r > 1$ より

$$r = \boxed{\mathbf{4}} \qquad \cdots\cdots \text{(コの答)}$$

であり，③より

$$x = \frac{64}{4} = \boxed{\mathbf{16}} \qquad \cdots\cdots \text{(サシの答)}$$

である．これより

$$s_n = 16 \cdot 4^{n-1} = 4^{n+1}$$

であり，数列 $\{t_n\}$ の一般項は

$$t_n = s_n \log_4 s_n = 4^{n+1} \log_4 4^{n+1}$$

$$= \left(n + \boxed{\mathbf{1}}\right) \cdot 4^{n+\boxed{\mathbf{1}}} \qquad \cdots\cdots \text{(ス，セの答)}$$

である． $\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n を求める．

$$
\begin{aligned}
U_n &= 2\cdot 4^2 + 3\cdot 4^3 + 4\cdot 4^4 + \cdots + (n+1)\cdot 4^{n+1} \\
4U_n &= \qquad\qquad 2\cdot 4^3 + 3\cdot 4^4 + \cdots + n\cdot 4^{n+1} + (n+1)\cdot 4^{n+2}
\end{aligned}
$$

$\longleftarrow$ $\sum$(等差)(等比)

$U_n - 4U_n$ を計算すると

$\longleftarrow$ 「公比倍して，引く」

$$
\begin{aligned}
-3U_n &= 2\cdot 4^2 + 4^3 + 4^4 + \cdots + 4^{n+1} - (n+1)\cdot 4^{n+2} \\
&= 4^2 + \frac{4^2(4^n - 1)}{4-1} - (n+1)\cdot 4^{n+2} \\
&= 4^2\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - n - 1\right)\cdot 4^{n+2} \\
&= \frac{32}{3} - \frac{3n+2}{3}\cdot 4^{n+2}
\end{aligned}
$$

よって

$$
U_n = \frac{\boxed{\mathbf{3}}\,n + \boxed{\mathbf{2}}}{\boxed{\mathbf{9}}}\cdot 4^{n+\boxed{\mathbf{2}}} - \frac{\boxed{\mathbf{32}}}{\boxed{\mathbf{9}}} \quad \cdots\cdots\ (\text{ソ〜ナの答})
$$

であることがわかる．