関数 $f(x)$ について，区間 I における次の性質 (A) を考える．

性質 (A)　区間 I に含まれる任意の 2 点 a, b に対して

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

が成り立つ．

(1) 関数 $f(x)=-x^2$ は区間 $-\infty<x<\infty$ において性質 (A) を持つことを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ が区間 I において性質 (A) を持つとき，区間 I に含まれる n 個の任意の数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n に対して

$$\text{(B)}\quad f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \geqq \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n}$$

が成り立つことが知られている．

このことを $n=2^k$ (k は自然数) の場合について証明せよ．

(3) 連続関数 $f(x)$ が区間 $[\,0,\ 1\,]$ において性質 (A) を持つとき，

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つことを示せ．

(17 順天堂大 医 3)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 略

【解答】

(1) $f(x)=-x^2$ について考える．任意の実数 a, b に対し，

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{f(a)+f(b)}{2}\\
=&-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{-a^2-b^2}{2}\\
=&-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}\\
=&\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\\
\geqq&0
\end{aligned}$$

であるので

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

が成り立つ．

したがって，$f(x)=-x^2$ は区間 $-\infty<x<\infty$ において性質 (A) をもつ．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) すべての自然数 k について,「区間 I に属する 2^k 個の任意の実数 a_1, a_2, $\cdots$, a_{2^k} に対して

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right) \geqq \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2^k})}{2^k} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ」ことを，k に関する数学的帰納法で証明する．

(i) $k=1$ すなわち $n=2^1$ のとき，$f(x)$ は性質 (A) をもつので，①は成り立つ．

(ii) $k=l$ のとき①が成り立つと仮定する．このとき，区間 I に属する 2^{l+1} 個の任意の実数 a_1, a_2, $\cdots$, $a_{2^{l+1}}$ を 2^l 個ずつの 2 グループに分けて

$$a=\frac{1}{2^l}\sum_{i=1}^{2^l} a_i, \quad b=\frac{1}{2^l}\sum_{i=2^l+1}^{2^{l+1}} a_i$$

とおく．a, b は I に属するから

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{l+1}}}{2^{l+1}}\right) \\
=& f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
\geqq& \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (\because \text{ 性質 (A)}) \\
=& \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^l}}{2^l}\right)+f\left(\frac{a_{2^l+1}+a_{2^l+2}+\cdots+a_{2^{l+1}}}{2^l}\right)\right\} \\
\geqq& \frac{1}{2}\left\{\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2^l})}{2^l}+\frac{f(a_{2^l+1})+f(a_{2^l+2})+\cdots+f(a_{2^{l+1}})}{2^l}\right\} \\
& \qquad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\
=& \frac{f(a_1)+\cdots+f(a_{2^l})+f(a_{2^l+1})+\cdots+f(a_{2^{l+1}})}{2^{l+1}}
\end{aligned}$$

となるので

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{l+1}}}{2^{l+1}}\right) \geqq \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2^{l+1}})}{2^{l+1}}$$

が成り立つ．つまり，$k=l+1$ のときも ①は成り立つ．

以上 (i)，(ii) により，命題は証明された． …… (証明終わり)

(3) 区間 $[0,\ 1]$ を n 等分 $(n=2^k)$ し，$x_i=\dfrac{i}{n}$ $(0 \leqq i \leqq n)$, $c_i=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}(1 \leqq i \leqq n)$ とおく．

$f(x)$ は $[0,\ 1]$ で連続なので

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots ②$$

である．一方，(2) で証明したことから，

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\frac{1}{n} \leqq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i\right)$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{x_0+x_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{0+1}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}+\frac{(n-1)n}{2n}\right\}\\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{2n}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\frac{1}{n} \leqq f\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．②，③により

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

- ②の代わりに

  $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

  を用いた場合には

  $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n} &\leqq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \quad (\because\ (2))\\ &= f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\right)\\ &= f\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2n}\right)\\ &= f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$

  とし，$f(x)$ が連続であることから

  $$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

  となることを用いればよい．

- $0 \leqq x \leqq 1$ とする．$a=x,\ b=1-x$ とおくと $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{1}{2}$ であり，性質 (A) の不等式に代入すると

  $$f\left(\frac{1}{2}\right) \geqq \frac{f(x)+f(1-x)}{2}$$

  である．両辺を 0 から 1 まで x で積分すると

  $$\int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right)\,dx \geqq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 f(1-x)\,dx$$

最後の積分を $1-x=t$ と置換すると

$$\left[f\left(\frac{1}{2}\right)x\right]_0^1 \geqq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_1^0 f(t)\,(-1)dt$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geqq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots (\text{証明終わり})$$

- (2) では，$n=2^k$ の場合に限定して (B) を証明した．この結果を用いると，すべての自然数 n に対して (B) が成り立つことを証明できる．

　ここでは，$n=2^2$ の場合に (B) が成り立つことを用いて，$n=3$ の場合も (B) が成り立つことを証明してみよう．

　関数 $f(x)$ が区間 I で性質 (A) をもつとき，I に属する任意の 3 個の実数 a_1，a_2，a_3 に対し

$$b = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$$

とおき，I に属する $2^2=4$ 個の実数

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b$$

に対して (2) の結果を適用すると

$$f\left(\frac{a_1+a_2+a_3+b}{4}\right) \geqq \frac{f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(b)}{4}$$

が成り立つ．

$$\frac{a_1+a_2+a_3+b}{4} = \frac{3b+b}{4} = b$$

であるから

$$f(b) \geqq \frac{f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(b)}{4}$$

が成り立つ．$f(b)$ について整理すると

$$f(b) \geqq \frac{f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)}{3}$$

となる．

　同様の方法で，任意の m $(m \geqq 2)$ に対し

「$n=m$ 場合に (B) が成り立てば，$n=m-1$ の場合にも (B) が成り立つ」

ことが示される．このことと，$n=2^k$ の場合に (B) が成り立つことから，すべての自然数 n について (B) が成り立つことが分かる．