次の 2 つの条件 (ア)，(イ) を満たす n 桁の自然数の個数を a_n とする．

(ア) 各位の数が 1，2，3，4，5 のいずれかである．
(イ) 各位の数の和が 3 の倍数である．

例えば，315 は条件 (ア)，(イ) を満たす 3 桁の自然数であり，また 42234 は条件 (ア)，(イ) を満たす 5 桁の自然数である．このとき，次の問に答えよ．

(1) a_2 を求めよ．
(2) $n \geqq 1$ のとき，a_{n+1} を a_n と n で表せ．
(3) 条件 (ア) を満たす n 桁の自然数の個数を b_n とし，$c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(17 東京海洋大 海洋科学・資源 5)

【答】

(1) 9
(2) $a_{n+1} = -a_n + 2 \cdot 5^n$
(3) $c_n = \dfrac{1}{3}\left\{1 + 2\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}$

【解答】

(1) 1，2，3，4，5 を 3 で割った余りで分類すると右の表となる．
和が 3 の倍数となる 2 つの数の組は

$$\{3,\ 3\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 5\},\ \{4,\ 2\},\ \{4,\ 5\}$$

である．これらの組からできる 2 桁の整数の個数は，2 数が異なるとき 2! 個，同じとき 1 個だから

余り	0	1	2
		1	2
	3	4	5

$$a_2 = 4 \times 2! + 1 = \mathbf{9}\ (個)$$ ……(答)

(2) $n \geqq 1$ として，(ア)，(イ) を満たす $n+1$ 桁の整数の個数を求める．
最初の n 個までの数の和を s_n とする．

- s_n を 3 で割ったときの余りが 0 のとき，末位の数は 3
- s_n を 3 で割ったときの余りが 1 のとき，末位は 2 または 5
- s_n を 3 で割っときの余りが余り 2 のとき，末位は 1 または 4

であるから

- s_n を 3 で割ったときの余りが 0 のとき，a_n 個
- s_n を 3 で割ったときの余りが 0 でないときは，ともに 2 個ずつで同じになるから，$(5^n - a_n) \times 2$ 個

である．したがって

$$a_{n+1} = a_n + 2(5^n - a_n)$$
$$\boldsymbol{a_{n+1} = -a_n + 2 \cdot 5^n} \quad \cdots\cdots ①$$ ……(答)

(3) 条件 (ア) を満たす n 桁の自然数の個数 b_n は $b_n = 5^n$ である．

①の両辺を $b_{n+1} = 5^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{a_n}{5^n} + \frac{2}{5}$$

$c_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_n}{5^n}$ とおくと

$$c_{n+1} = -\frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}$$

$\alpha = -\dfrac{1}{5}\alpha + \dfrac{2}{5}$ の解が $\alpha = \dfrac{1}{3}$ であることを用いると

$$c_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{5}\left(c_n - \frac{1}{3}\right)$$

と変形される．$a_1 = 1$ より，数列 $\left\{c_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $c_1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{a_1}{5} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{15}$ で公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列である．

$$c_n - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{c_n = \frac{1}{3}\left\{1 + 2\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 本来なら (3) は c_n でやめずに a_n まで，すなわち

$$a_n = b_n c_n = 5^n c_n = \frac{1}{3}\{5^n + 2(-1)^n\}$$

を求める問題であるべきでしょう．

$a_1 = 1$，$a_{n+1} = -a_n + 2\cdot 5^n$ …… ㋐ を，$\{c_n\}$ を経由せず，公比 -1 の等比数列に変形して解いてみましょう．

㋐より

$$f(n+1) = -f(n) + 2\cdot 5^n \qquad \cdots\cdots ㋑$$

を満たす関数 $f(n)$ を見つけたい．$2\cdot 5^n$ をみて，$f(n)$ を

$$f(n) = p5^n \ (p \text{ は定数})$$

とおいてみる．㋑に代入すると

$$p5^{n+1} = -p5^n + 2\cdot 5^n$$

$$5p = -p + 2$$

$$\therefore\quad p = \frac{1}{3}$$

すなわち，$f(n) = \dfrac{1}{3}\cdot 5^n$ であり，㋐ − ㋑ より

$$a_{n+1} - f(n+1) = -(a_n - f(n))$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{3}\cdot 5^{n+1} = -\left(a_n - \frac{1}{3}\cdot 5^n\right)$$

である．数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{3}\cdot 5^n\right\}$ は初項 $a_1 - \dfrac{1}{3}\cdot 5 = 1 - \dfrac{1}{3}\cdot 5 = -\dfrac{2}{3}$，公比 -1 の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{3}\cdot 5^n = -\frac{2}{3}(-1)^{n-1} = \frac{2}{3}(-1)^n$$

$$\therefore\quad a_n = \frac{1}{3}\{5^n + 2(-1)^n\}$$