数列 $\{a_n\}$ は次の条件で定められているとする．

$$a_1=\frac{1}{3},\quad a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+4}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおいて，b_{n+1} を b_n を用いて表すと $b_{n+1}=\boxed{\text{カ}}b_n+\boxed{\text{キ}}$ であり，

$$b_{n+1}+\boxed{\text{ク}}=\boxed{\text{カ}}\left(b_n+\boxed{\text{ク}}\right)$$

と変形できる．ただし，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ は数値である．よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{\text{ケ}}$ であり，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\dfrac{1}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は $S_n=\boxed{\text{コ}}$ である．

(17 関西学院大 経・国際・政策 2(2))

【答】

カ	キ	ク	ケ	コ
$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	$5\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-2$	$15\left(\frac{4}{3}\right)^{n}-2n-15$

【解答】

$$a_1=\frac{1}{3},\quad a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+4}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$a_1\neq 0$ であり，$a_k\neq 0$ と仮定すると $a_{k+1}\neq 0$ であるから，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $a_n\neq 0$ である．与式は逆数をとることができる．

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+4}{3a_n}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{2}{3}$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと

$$b_{n+1}=\boxed{\boldsymbol{\frac{4}{3}}}b_n+\boxed{\boldsymbol{\frac{2}{3}}}\qquad\cdots\cdots\ (\text{カ，キの答})$$

であり，$\beta=\dfrac{4}{3}\beta+\dfrac{2}{3}$ の解が $\beta=-2$ であることを用いると，この式は

$$b_{n+1}+\boxed{\mathbf{2}}=\frac{4}{3}(b_n+2)\qquad\cdots\cdots\ (\text{クの答})$$

と変形される．$a_1=\dfrac{1}{3}$ より $b_1=\dfrac{1}{a_1}=3$ で，数列 $\{b_n+2\}$ は初項 $b_1+2=5$，公比 $\dfrac{4}{3}$ の等比数列である．したがって

$$b_n+2=5\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_n=\boxed{\boldsymbol{5\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-2}}\qquad\cdots\cdots\ (\text{ケの答})$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{5\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-2}$$

また，

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k = 5\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} 2 \\
&= 5\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n}-1}{\frac{4}{3}-1} - 2n \\
&= \boxed{\boldsymbol{15\left(\frac{4}{3}\right)^{n} - 2n - 15}}
\end{aligned}
$$

…… (コの答)