$\{a_n\}$ を数列とし，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく．$C$ を定数とする．数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{S_n\}$ が関係式

$$a_1 = 2, \quad a_n = n^2 - 2S_n + C \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $C$ の値を求めよ．

(2) $a_{n+1}$ を，$a_n$ と $n$ を用いて表せ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_n - n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．このとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ．

(17 静岡大 理 (数)3 情報 1 教育 2)

---

【答】

(1) $C = 5$

(2) $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2n + 1)$

(3) $b_n = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(4) $S_n = \dfrac{1}{2}n^2 - \dfrac{1}{2}n + 3 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

---

【解答】

(1) $$a_n = n^2 - 2S_n + C \qquad \cdots\cdots ①$$

①に $n = 1$ を代入する．$a_1 = S_1 = 2$ より

$$a_1 = 1^2 - 2S_1 + C$$
$$2 = 1 - 4 + C$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{C = 5} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) ①の $n$ を $n+1$ におきかえると

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - 2S_{n+1} + C \qquad \cdots\cdots ②$$

② − ① より

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 1 - 2(S_{n+1} - S_n)$$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ より

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 1 - 2a_{n+1}$$
$$3a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2n + 1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) $b_n = a_n - n + 1$ を用いて，(2) の結果を $\{b_n\}$ の関係式に直す．
$a_n = b_n + n - 1$ を (2) の結果式に代入すると

$$b_{n+1} + (n+1) - 1 = \frac{1}{3}\{(b_n + n - 1) + 2n + 1\}$$
$$b_{n+1} + n = \frac{1}{3}(b_n + 3n)$$
$$\therefore \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$$

ここで $b_1 = a_1 - 1 + 1 = 2$ であるから

$$\boldsymbol{b_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$ ……(答)

- $b_n = a_n - n + 1$ の出所を探っておく．
  (2) より，$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{2n+1}{3}$ …… ㋐ より
  $$f(n+1) = \frac{1}{3}f(n) + \frac{2n+1}{3} \quad \cdots\cdots ㋑$$
  を満たす関数 $f(n)$ を見つけたい．$\dfrac{2n+1}{3}$ が $n$ についての 1 次式であることより，$f(n)$ を
  $$f(n) = pn + q$$
  として，$n$ についての 1 次の一般式とおいてみる．㋑に代入すると
  $$p(n+1) + q = \frac{1}{3}(pn + q) + \frac{2n+1}{3}$$
  $$pn + p + q = \frac{p+2}{3}n + \frac{q+1}{3}$$
  これがすべての自然数 $n$ に対して成り立つ条件は
  $$\begin{cases} p = \dfrac{p+2}{3} \\ p + q = \dfrac{q+1}{3} \end{cases} \qquad \therefore \quad p = 1,\ q = -1$$
  すなわち，$f(n) = n - 1$ であり，㋐ − ㋑ より
  $$a_{n+1} - f(n+1) = \frac{1}{3}(a_n - f(n))$$
  $$a_{n+1} - (n+1) + 1 = \frac{1}{3}(a_n - n + 1)$$
  を得る．すなわち，$b_n = a_n - f(n)$ である．

(4) (3) より

$$a_n = b_n + n - 1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + n - 1$$

よって，①より

$$\begin{aligned} 2S_n &= -a_n + n^2 + 5 \\ &= -\left\{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + n - 1\right\} + n^2 + 5 \\ &= n^2 - n + 6 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$ ……(答)