三角形があり，その頂点を反時計回りの順に A，B，C とする．三角形 ABC において，点 P は頂点 A から出発し，1 秒経過することに隣の頂点へ移動する．ただし，反時計回りに移動する確率は $\dfrac{2}{3}$，時計回りに移動する確率は $\dfrac{1}{3}$ とする．n を自然数とし，点 P が頂点 A を出発してから n 秒経過したときに頂点 A，B，C にある確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とする．次の問いに答えよ．

(1) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を，a_n，b_n，c_n を用いて表せ．
(2) a_{n+2} を c_n を用いて表せ．
(3) a_{n+6} を a_n を用いて表せ．
(4) 0 以上の整数 k に対して a_{6k+1} を求めよ．

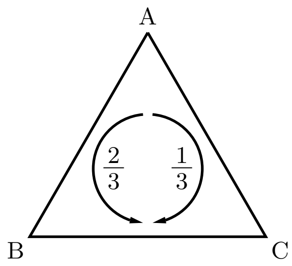
(17 大阪市大 理系 3)

【答】

(1) $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{2}{3}c_n$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}c_n+\dfrac{2}{3}a_n$，$c_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}b_n$
(2) $a_{n+2}=-\dfrac{1}{3}c_n+\dfrac{4}{9}$
(3) $a_{n+6}=-\dfrac{1}{27}a_n+\dfrac{28}{81}$
(4) $a_{6k+1}=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{27}\right)^k\right\}$

【解答】

(1) P が $n+1$ 秒後に A にあるのは，P が
n 秒後に B にあり，次の 1 秒で時計回りに移動するか，
または，
n 秒後に C にあり，次の 1 秒で反時計回りに移動する
かのいずれかの場合であるから



$$a_{n+1}=b_n\cdot\frac{1}{3}+c_n\cdot\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{3}c_n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

同様に

$$\boldsymbol{b_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+\frac{2}{3}a_n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\boldsymbol{c_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) の結果より

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=\frac{1}{3}b_{n+1}+\frac{2}{3}c_{n+1}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}c_n+\frac{2}{3}a_n\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n\right)\\&=\frac{1}{9}c_n+\frac{4}{9}(a_n+b_n)\end{aligned}$$

n 秒後に P は A，B，C のいずれかにあるから

$$a_n+b_n+c_n=1$$

が成り立ち

$$a_{n+2} = \frac{1}{9}c_n + \frac{4}{9}(1 - c_n)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_{n+2} = -\frac{1}{3}c_n + \frac{4}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) (2) と同様に

$$b_{n+2} = -\frac{1}{3}a_n + \frac{4}{9}$$
$$c_{n+2} = -\frac{1}{3}b_n + \frac{4}{9}$$

が成り立つ．これらと (2) の結果より

$$\begin{aligned} a_{n+6} &= -\frac{1}{3}c_{n+4} + \frac{4}{9} \\ &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}b_{n+2} + \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{9} \\ &= \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}a_n + \frac{4}{9}\right) + \frac{8}{27} \\ &= -\frac{1}{27}a_n + \frac{28}{81} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_{n+6} = -\frac{1}{27}a_n + \frac{28}{81}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(4) (3) の結果において，$n = 6k + 1$ とすると

$$a_{6(k+1)+1} = -\frac{1}{27}a_{6k+1} + \frac{28}{81}$$

さらに $A_k = a_{6k+1}$ とすると

$$A_{k+1} = -\frac{1}{27}A_k + \frac{28}{81}$$

$\alpha = -\frac{1}{27}\alpha + \frac{28}{81}$ の解 $\alpha = \frac{1}{3}$ を利用すると

$$A_{k+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{27}\left(A_k - \frac{1}{3}\right)$$

と変形できる．数列 $\left\{A_k - \frac{1}{3}\right\}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ は，初項 $A_0 - \frac{1}{3} = a_1 - \frac{1}{3} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{27}$ の等比数列であるから

$$A_k - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{27}\right)^k$$

よって

$$\boldsymbol{a_{6k+1} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{27}\right)^k\right\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$