3 個の箱 A，B，C があり，ボールが 1 個ずつ入っている．コインを投げて表が出れば箱 A のボールと箱 B のボールを交換し，裏が出れば箱 B のボールと箱 C のボールを交換する試行を繰り返す．最初に，箱 A には赤いボールが，箱 B には白いボールが，箱 C には赤いボールが入っているものとして，この試行を n 回繰り返したとき，白いボールが箱 A に入っている確率 a_n，箱 B に入っている確率 b_n，箱 C に入っている確率 c_n をそれぞれ求めよ．

(17 津田塾大 学芸 (情報) 3)

【答】 $a_n = c_n = \dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$, $b_n = \dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

【解答】

試行を $(n+1)$ 回繰り返したとき，白いボールが箱 A に入っているのは

(i) n 回の試行後に白いボールが箱 A に入っていて，コインを投げて裏が出る
(ii) n 回の試行後に白いボールが箱 B に入っていて，コインを投げて表が出る

の各場合があるから

$$a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \qquad \cdots\cdots ①$$

同様に考えて

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \qquad \cdots\cdots ②$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}b_n \qquad \cdots\cdots ③$$

ここで $a_0 = 0$, $b_0 = \dfrac{1}{2}$, $c_0 = 0$，$a_n + b_n + c_n = 1$ だから，②は

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n)$$

$$\therefore\quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n)$$

$$\therefore\quad b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

$\beta = -\dfrac{1}{2}\beta + \dfrac{1}{2}$ の解 $\beta = \dfrac{1}{3}$ を利用すると

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

と変形される．数列 $\left\{b_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $b_0 - \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列だから

$$b_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad (n \geqq 0)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

①$-$③ から

$$a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n)$$

これより

$$a_n - c_n = (a_0 - c_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n = (0-0)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

よって

$$\begin{aligned} a_n = c_n &= \frac{1}{2}(1 - b_n) \\ &= \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = c_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 「①かつ③かつ $a_0 = c_0$」 (同じ漸化式かつ初期条件一致) より

  $$a_n = c_n$$

  である．この後は解答と同じ．
- b_n の一般項を①に代入すると

  $$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad \cdots\cdots ㋐ \end{aligned}$$

  この漸化式を解いてみよう．

  $$\alpha(n+1) = \frac{1}{2}\alpha(n) + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad \cdots\cdots ㋑$$

  を満たす $\alpha(n)$ を求めたい．$\alpha(n) = p + q\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ とおいてみる．

  $$\begin{aligned} ㋑ &\iff p + q\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\left\{p + q\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &\iff \frac{p}{2} - q\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

  これが 0 以上の整数 n で成り立つための条件は

  $$\begin{cases} \dfrac{p}{2} = \dfrac{1}{6} \\ -q = \dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad \therefore \quad p = \frac{1}{3},\ q = -\frac{1}{3}$$

  $$\therefore \quad \alpha(n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

  ㋐$-$㋑ より

  $$a_{n+1} - \alpha(n+1) = \frac{1}{2}(a_n - \alpha(n))$$

$\{a_n - \alpha(n)\}$ は初項 $a_0 - \alpha(n) = 0 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = 0$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - \alpha(n) = 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\therefore \quad a_n = \alpha(n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$