正四面体 ABCD がある．動点 P は初め頂点 A にあり，1 秒ごとに隣り合う 3 つの頂点のうちの 1 つに等しい確率で移動するものとする．自然数 n に対して，n 秒後に点 P が頂点 A，B，C，D にある確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n として，次の各問に答えよ．

(1) p_1，q_1，r_1，s_1 の値を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n を q_{n-1}，r_{n-1}，s_{n-1} を用いた式で表せ．さらに，p_n を n の式で表せ．

(3) q_n，r_n，s_n をそれぞれ n の式で表せ．

(4) 不等式 $|p_n - q_n| < 10^{-6}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ であることを用いてよい．

(17 高知工科大 2)

【答】

(1) $p_1 = 0$，$q_1 = \dfrac{1}{3}$，$r_1 = \dfrac{1}{3}$，$s_1 = \dfrac{1}{3}$

(2) $p_n = \dfrac{1}{3}(q_{n-1} + r_{n-1} + s_{n-1})$，$p_n = \dfrac{1}{4}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

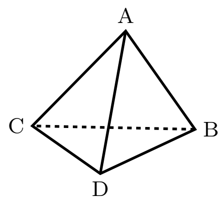
(3) $q_n = r_n = s_n = \dfrac{1}{4}\left\{1 + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

(4) $n = 13$

【解答】

(1) 1 秒後に頂点 A から頂点 A に移動することはないから

$$\boldsymbol{p_1 = 0} \qquad \cdots\cdots(答)$$



また，1 秒後に頂点 A から頂点 B，C，D に移動する確率はすべて $\dfrac{1}{3}$ であるから

$$\boldsymbol{q_1 = \frac{1}{3},\ r_1 = \frac{1}{3},\ s_1 = \frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $n \geqq 2$ のとき，n 秒後に点 P が頂点 A に移動するのは，$(n-1)$ 秒後に点 P が頂点 B，C，D のいずれかにあり，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 A に移動するときであるから

$$p_n = q_{n-1} \cdot \frac{1}{3} + r_{n-1} \cdot \frac{1}{3} + s_{n-1} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{p_n = \frac{1}{3}(q_{n-1} + r_{n-1} + s_{n-1})} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

さらに，$p_{n-1} + q_{n-1} + r_{n-1} + s_{n-1} = 1$ より

$$① \iff p_n = \frac{1}{3}(1 - p_{n-1})$$

$$\therefore\ p_n = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{3}$$

$\alpha = -\dfrac{1}{3}\alpha + \dfrac{1}{3}$ の解 $\alpha = \dfrac{1}{4}$ を利用すると，①は

$$p_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_{n-1} - \frac{1}{4}\right)$$

と変形される．数列 $\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であり

$$p_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{p_n = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) (2) と同じようにして，$n \geqq 2$ のとき

$$q_n = \frac{1}{3}(r_{n-1} + s_{n-1} + p_{n-1})$$

$$\therefore \quad q_n = \frac{1}{3}(1 - q_{n-1})$$

$$\therefore \quad q_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(q_{n-1} - \frac{1}{4}\right)$$

数列 $\left\{q_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $q_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であり

$$q_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{q_n = \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

r_n，s_n も q_n と同じようにして

$$\boldsymbol{r_n = \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}, \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{s_n = \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 図形の対称性より，q_n，r_n，s_n は等確率で起こるから

$$q_n = r_n = s_n$$

$$= \frac{1}{3}(1 - p_n) = \frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

(4) (3) より

$$\begin{aligned} p_n - q_n &= \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} - \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \\ &= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n} \end{aligned}$$

であるから

$$|p_n - q_n| < 10^{-6} \iff \left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-6} \qquad \cdots\cdots ②$$

②の両辺で常用対数をとると

$$② \iff -n\log_{10} 3 < -6 \iff n > \frac{6}{\log_{10} 3}$$

$0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ より

$$\frac{6}{0.48} < \frac{6}{\log_{10} 3} < \frac{6}{0.47}$$

であり，$\dfrac{6}{0.48} = 12.5$, $\dfrac{6}{0.47} = 12.7\cdots$ であるから

$$12.5 < \frac{6}{\log_{10} 3} < 12.7\cdots$$

よって，求める最小の自然数 n は $\boldsymbol{n = 13}$ である**.** ……(答)