(1) $\alpha,\ \beta$ は定数で，$\alpha > 0,\ \beta > 0$ とする．x の 3 次方程式

$$18x^3 - 6\alpha x + \beta = 0$$

がただ 1 つの実数解をもつための必要十分条件は $\beta >$ $\boxed{(フ)}$ である．$\beta =$ $\boxed{(フ)}$ のとき，曲線 $y = 18x^3 - 6\alpha x + \beta$ と x 軸で囲まれる部分の面積を α を用いて表すと $\boxed{(ヘ)}$ となる．

(2) 放物線 $C : y = 3x^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(-a,\ 3a^2\right)$ $(a > 0)$ における法線と C との交点で点 P と異なる点の x 座標を $X(a)$ とする．$X(a) =$ $\boxed{(ホ)}$ であり，$a > 0$ における $X(a)$ の最小値は $\boxed{(マ)}$ である．

次に，$x_0 > 0$ とし，点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$ を放物線 C 上にない点とする．C 上の点における法線で点 Q を通るものがただ 1 つであるための必要十分条件は，$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x) =$ $\boxed{(ミ)}$ に対して，$y_0 < f(x_0)$ が成り立つことである．

(17 慶應大 理工 5)

【答】

(フ)	(ヘ)	(ホ)	(マ)	(ミ)
$\dfrac{4\alpha\sqrt{\alpha}}{3}$	$\dfrac{3}{2}\alpha^2$	$a + \dfrac{1}{18a}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	$\left(\dfrac{3}{4}x\right)^{\frac{2}{3}} + \dfrac{1}{6}$

【解答】

(1) $g(x) = 18x^3 - 6\alpha x + \beta$ とおく．

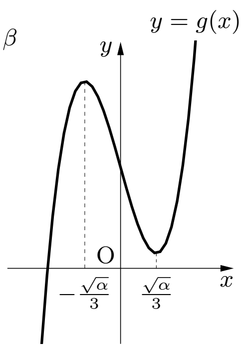
$$g'(x) = 54x^2 - 6\alpha = 6(9x^2 - \alpha)$$

$\alpha > 0$ より増減表は

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{\alpha}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$g\left(-\frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right) = -18\cdot\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{27} + 6\alpha\frac{\sqrt{\alpha}}{3} + \beta = \frac{4}{3}\alpha\sqrt{\alpha} + \beta$$

$$g\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right) = -\frac{4}{3}\alpha\sqrt{\alpha} + \beta$$



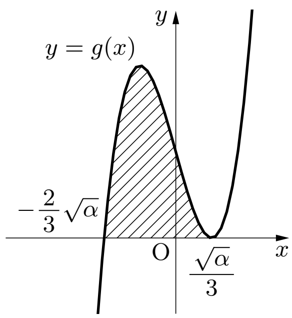
$\alpha > 0,\ \beta > 0$ より，$g\left(-\dfrac{\sqrt{\alpha}}{3}\right) > 0$ であるから，$g(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつための必要十分な条件は

$$g\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right) > 0 \iff \beta > \boldsymbol{\frac{4}{3}\alpha\sqrt{\alpha}} \quad \cdots\cdots \text{(フの答)}$$

$\beta = \dfrac{4}{3}\alpha\sqrt{\alpha}$ のとき

$$g(x) = 18x^3 - 6\alpha x + \frac{4}{3}\alpha\sqrt{\alpha}$$
$$= 18\left(x + \frac{2}{3}\sqrt{\alpha}\right)\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^2$$

であり，求める面積は



$$\int_{-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}}^{\frac{\sqrt{\alpha}}{3}} 18\left(x + \frac{2}{3}\sqrt{\alpha}\right)\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^2 dx$$
$$= \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}}^{\frac{\sqrt{\alpha}}{3}} 18\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3} + \sqrt{\alpha}\right)\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^2 dx$$
$$= 18\left[\frac{1}{4}\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^4 + \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^3\right]_{-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}}^{\frac{\sqrt{\alpha}}{3}}$$
$$= 18\left(-\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{3}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}\alpha^2}$$

…… (への答)

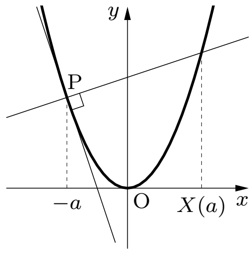
- 部分積分すると

$$\int_{-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}}^{\frac{\sqrt{\alpha}}{3}} 18\left(x + \frac{2}{3}\sqrt{\alpha}\right)\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^2 dx$$
$$= 6\left[\left(x + \frac{2}{3}\sqrt{\alpha}\right)\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^3\right]_{-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}}^{\frac{\sqrt{\alpha}}{3}} - \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}}^{\frac{\sqrt{\alpha}}{3}} 6\left(x - \frac{\alpha}{3}\right)^3 dx$$
$$= -\frac{6}{4}\left[\left(x - \frac{\alpha}{3}\right)^4\right]_{-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}}^{\frac{\sqrt{\alpha}}{3}}$$
$$= \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha} - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^4$$
$$= \frac{3}{2}\alpha^2$$

- $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$ である．
- 一般化すると，$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ である．

(2) $C : y = 3x^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(-a,\ 3a^2\right)$ における法線の方程式は

$$y = \frac{1}{6a}(x+a) + 3a^2 = \frac{x}{6a} + 3a^2 + \frac{1}{6}$$



C の方程式と連立する．$a \neq 0$ より

$$3x^2 = \frac{x}{6a} + 3a^2 + \frac{1}{6}$$

$$18ax^2 - x - 18a^3 - a = 0$$

$$(x+a)(18ax - 18a^2 - 1) = 0$$

$$\therefore \quad x = -a,\ a + \frac{1}{18a}$$

P と異なる点の x 座標 $X(a)$ は

$$X(a) = \boldsymbol{a + \frac{1}{18a}} \qquad \cdots\cdots \text{(ホの答)}$$

である．$a > 0$ より

$$X(a) \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{18a}} = 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}} \qquad \cdots\cdots \text{(マの答)}$$

次に，C 上の点 P における法線で点 Q$(x_0,\ y_0)$ を通るものがただ 1 つであるための条件は

$$y_0 = \frac{x_0}{6a} + 3a^2 + \frac{1}{6}$$

すなわち，$a \neq 0$ より

$$18a^3 - (6y_0 - 1)a + x_0 = 0$$

を満たす実数 a がただひとつ存在することである．

$$h(a) = 18a^3 - (6y_0 - 1)a + x_0$$

とおくと

$$h'(a) = 54a^2 - (6y_0 - 1)$$

である．

(i) $6y_0 - 1 \leqq 0$ のとき

$h'(a) \geqq 0$ であり，$h(a)$ は単調増加である．$h(a)$ の値域は実数全体であり，$h(a) = 0$ を満たす実数 a はただ 1 つである．すなわち，$y_0 \leqq \dfrac{1}{6}$ のときは条件を満たす．

(ii) $6y_0 - 1 > 0$ のとき

$\alpha = y_0 - \dfrac{1}{6}$，$\beta = x_0$ とおくと $\alpha > 0$，$\beta > 0$ であり

$$h(a) = g(a)$$

であるから，(1) の (フ) の結果が使える．求める条件は

$$x_0 > \frac{4}{3}\left(y_0 - \frac{1}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{6} < y_0 < \left(\frac{3}{4}x_0\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{6}$$

よって，(i)，(ii) より，求める条件は

$$y_0 < \left(\frac{3}{4}x_0\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{6}$$

すなわち，$x \geqq 0$ で定義された連続関数

$$f(x) = \boldsymbol{\left(\frac{3}{4}x\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{6}} \qquad \cdots\cdots \text{(ミの答)}$$

に対して $y_0 < f(x_0)$ が成り立つことである．