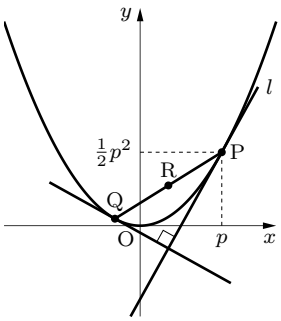
放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{2}p^2\right)$ における接線を l とする．ただし $p>0$ とする．以下の問いに答えよ．



(1) 直線 l の方程式を，p を用いて表せ．

(2) 直線 l と垂直に交わる直線が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ と点 Q で接するとき，点 Q の座標を，p を用いて表せ．

(3) 点 P と (2) の点 Q の中点 R の座標を，p を用いて表せ．

(4) 点 P が $p>0$ の範囲で動くとき，(3) の点 R が描く曲線の方程式を求めよ．

(17 豊橋技術科学大学 2)

【答】

(1) $y=px-\dfrac{1}{2}p^2$

(2) $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{p},\ \dfrac{1}{2p^2}\right)$

(3) $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2}\left(p-\dfrac{1}{p}\right),\ \dfrac{1}{4}\left(p^2+\dfrac{1}{p^2}\right)\right)$

(4) $y=x^2+1$

【解答】

(1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{2}p^2\right)$ における接線 l の方程式は

$$y-\frac{1}{2}p^2=p(x-p)$$

すなわち

$$\boldsymbol{l : y=px-\frac{1}{2}p^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 点 Q の座標を $\left(q,\ \dfrac{1}{2}q^2\right)$ とすると，Q における接線と l は直交するから

$$pq=-1 \qquad \therefore \quad q=-\frac{1}{p}$$

Q の座標は

$$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{p},\ \frac{1}{2p^2}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{2}p^2\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{p},\ \dfrac{1}{2p^2}\right)$ の中点 R の座標は

$$\boldsymbol{\mathrm{R}\left(\frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right),\ \frac{1}{4}\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4) R の座標を $(x,\ y)$ とすると，(3) より

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(p - \dfrac{1}{p}\right) & \cdots\cdots ① \\ y = \dfrac{1}{4}\left(p^2 + \dfrac{1}{p^2}\right) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

であり，p は $p > 0$ …… ③ の範囲で動く．

R の軌跡は「①かつ②かつ③」を満たす p が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$\begin{aligned} &「①かつ②かつ③」 \\ \iff &\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(p - \dfrac{1}{p}\right) \\ y = \left\{\dfrac{1}{2}\left(p - \dfrac{1}{p}\right)\right\}^2 + 1 \\ p > 0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} p^2 - 2xp - 1 = 0 \\ y = x^2 + 1 \\ p > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

p についての 2 次方程式 $p^2 - 2xp - 1 = 0$ は (2 解の積) $= -1$ であり，x の値にかかわらず正の解と負の解 (すなわち正の解) をもつ．

よって，R の軌跡は放物線

$$\boldsymbol{y = x^2 + 1} \text{ の全体} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- R がどの範囲で動くかをキチンと説明しなければならない．求める条件は，正の数 p が存在するための条件なのだから，①を p についての方程式とみることになる．