$a,\ b$ を実数とし，関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$$

を満たすとする.

(1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値を持つとする．このような $a,\ b$ が満たす条件を求めよ．また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ.

(17 北海道大 文系 4)

【答】

(1) $f(0)$

(2) $a>1$ かつ $0<b<(a-1)^2$，図は略.

【解答】

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\int_{-1}^{1}f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ は定数であり，この値を c とおくと，①は

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+c$$

となる.

$$\begin{aligned}c&=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{3}t^3-at^2+(a^2-b)t+c\right\}dt\\&=2\Big[-a\cdot\frac{t^3}{3}+ct\Big]_0^1 \quad (\because\ \text{偶関数・奇関数})\\&=-\frac{2}{3}a+2c\end{aligned}$$

c について解くと

$$c=\frac{2}{3}a$$

である．よって

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\frac{2}{3}a \qquad \cdots\cdots ①'$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{f(0)=\frac{2}{3}a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2) ① (①$'$) を x で微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=x^2-2ax+a^2-b\\&=(x-a)^2-b\end{aligned}$$

であり

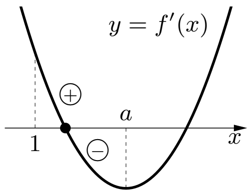
関数 $f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値を持つ

$\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ の符号が正から負に変わる x が $x>1$ の範囲で存在する

$\Longleftrightarrow$ x の 2 次方程式 $f'(x)=0$ が $x>1$ の範囲に相異なる 2 実解を持つ $\qquad\cdots\cdots (*)$

である.

$y = f'(x)$ のグラフを考察すると，a, b の求める条件は



$$(*) \iff \begin{cases} \text{軸の位置}: a > 1 \\ \text{頂点の } y \text{ 座標}: f'(a) = -b < 0 \\ \text{端点の符号}: f'(1) = (1-a)^2 - b > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < (a-1)^2 \end{cases}$$

である．点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲は下図の斜線部分である．境界線は含まない．　……(答)