$f(x)+\int_0^1 f(t)\,dt = x^2 - x$ を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい．

(17 福島大 人文社会 1(4))

【答】 $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{12}$

【解答】

$$f(x)+\int_0^1 f(t)\,dt = x^2 - x$$

$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であり，$a = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと，与式は

$$f(x) + a = x^2 - x$$

であり

$$f(x) = x^2 - x - a$$

である．これより

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 f(t)\,dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - t - a)\,dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - at\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{6} - a \end{aligned}$$

であり

$$2a = -\frac{1}{6} \qquad \therefore \quad a = -\frac{1}{12}$$

よって

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - x + \frac{1}{12}} \qquad \cdots\cdots(答)$$