定数 $a<1$ に対し，放物線 $C_1 : y=2x^2+1$，$C_2 : y=-x^2+a$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 放物線 C_1，C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ．

(2) C_1 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ．

(17 九州大 文系 1)

【答】

(1) $y=\pm4\sqrt{\dfrac{1-a}{6}}x+\dfrac{a+2}{3}$

(2) 4

【解答】

$$C_1 : y=2x^2+1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$C_2 : y=-x^2+a \quad (a<1) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) C_1 上の点 $(t,\ 2t^2+1)$ における接線の方程式は，$y'_{x=t}=4t$ より

$$y=4t(x-t)+2t^2+1$$

$$y=4tx-2t^2+1 \qquad \cdots\cdots ③$$

③が②に接する条件は

$$4tx-2t^2+1=-x^2+a$$

$$x^2+4tx-2t^2+1-a=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

が重解をもつことである．すなわち (判別式) $=0$ である．

$$(2t)^2-1\cdot(-2t^2+1-a)=0$$

$$6t^2=1-a$$

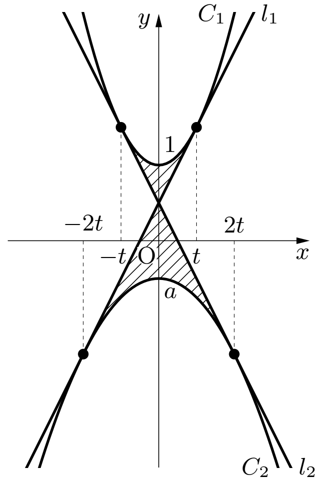
$a<1$ より

$$t=\pm\sqrt{\frac{1-a}{6}}$$

よって，2 つの直線の方程式は，③より

$$\boldsymbol{y=\pm4\sqrt{\frac{1-a}{6}}x+\frac{a+2}{3}} \qquad \cdots\cdots ⑤ \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) ④より②と③の接点の x 座標は $-2t$ であるから，C_1 と 2 本の直線⑤で囲まれた図形 (右図斜線上部)，および C_2 と 2 本の直線⑤で囲まれた図形 (右図斜線下部) は右の斜線部分となる．この図形は y 軸に関して対称であるから，$t>0$ とすると



$$
\begin{aligned}
S_1 &= 2\int_0^t \{2x^2+1-(4tx-2t^2+1)\}\,dx \\
&= 4\int_0^t (x-t)^2\,dx \\
&= 4\left[\frac{(x-t)^3}{3}\right]_0^t \\
&= \frac{4}{3}t^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= 2\int_{-2t}^0 \{4tx-2t^2+1-(-x^2+a)\}\,dx \\
&= 2\int_{-2t}^0 (x+2t)^2\,dx \quad (\because\ a=1-6t^2) \\
&= 2\left[\frac{(x+2t)^3}{3}\right]_{-2t}^0 \\
&= \frac{16}{3}t^3
\end{aligned}
$$

$$
\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{16}{3}t^3}{\frac{4}{3}t^3} = \mathbf{4}
$$

……(答)