$b,\ c$ を実数とする．2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が

$$0 \leqq f(1) \leqq 2, \quad 5 \leqq f(3) \leqq 6$$

を満たすとする．

(1) $f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ．
(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ．
(3) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(17 大阪大 理系 4)

【答】

(1) $\dfrac{7}{2} \leqq f(4) \leqq 6$

(2) $5 \leqq q \leqq \dfrac{25}{4}$

(3) $8\sqrt{6}$

【解答】

$f(x)=-x^2+bx+c$ は $\begin{cases} 0 \leqq f(1) \leqq 2 \\ 5 \leqq f(3) \leqq 6 \end{cases}$ を満たすから

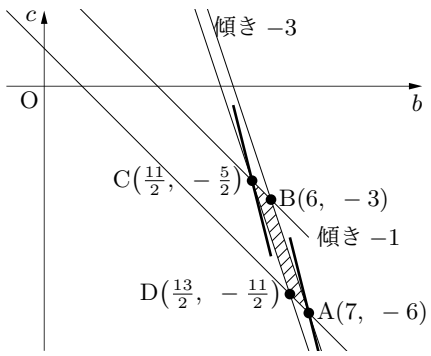
$$\begin{cases} 0 \leqq -1+b+c \leqq 2 \\ 5 \leqq -9+3b+c \leqq 6 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} -b+1 \leqq c \leqq -b+3 \\ -3b+14 \leqq c \leqq -3b+15 \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

(1) $f(4)=k$ とおくと

$$k=-16+4b+c \quad \cdots\cdots ② \quad \therefore \quad c=-4b+k+16 \quad \cdots\cdots ②'$$

$f(4)$ すなわち k のとりうる値の範囲は，「①かつ②」を満たす実数 $b,\ c$ が存在するような k の値の範囲であり，それは領域①と直線②′ が共有点をもつような k の値の範囲である．

bc 平面上に①を図示すると右図の斜線部分 (境界を含む) となる．②′ は傾き -4 の直線であることに注意する．



②′ が点 $\mathrm{A}(7,\ -6)$ を通るとき

$$k=-16+4\cdot 7+(-6)=6$$

②′ が点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{11}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$ を通るとき

$$k=-16+4\cdot\frac{11}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{2}$$

であるから

$$\frac{7}{2} \leqq k \leqq 6$$

であり，$f(4)$ のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{7}{2} \leqq f(4) \leqq 6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $f(x) = -\left(x - \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{b^2}{4} + c$ より，$y = f(x)$ の頂点の y 座標 q は

$$q = \frac{b^2}{4} + c \qquad \cdots\cdots ③$$

である．このとき

$$c = -\frac{b^2}{4} + q \qquad \cdots\cdots ③'$$

q のとりうる値の範囲は，「①かつ③」を満たす実数 b, c が存在するような q の値の範囲であり，これは領域①と放物線③′ が共有点をもつような q の値の範囲である．

③′ は上に凸な放物線であることに注意して最大値，最小値を求める．

q が最大となるのは，③′ が折れ線 ABC と共有点をもつときである．

点 $(7,\ -6)$ を通るとき　$q = \dfrac{7^2}{4} + (-6) = \dfrac{25}{4}$

点 $(6,\ -3)$ を通るとき　$q = \dfrac{6^2}{4} + (-3) = 6$

点 $\left(\dfrac{11}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$ を通るとき　$q = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{11}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{81}{16}$

となるので，q の最大値は $\dfrac{25}{4}$ である．

q が最小となるは，③′ が折れ線 CDA と共有点をもつときである．

③′ と直線 CD : $c = -3b + 14$ を連立すると

$$-\frac{b^2}{4} + q = -3b + 14$$

$$\therefore\quad b^2 - 12b + 56 - 4q = 0$$

$$(\text{判別式})/4 = (-6)^2 - (56 - 4q) = 4(q - 5)$$

である．③′ と直線 CD は (判別式) $= 0$ のとき，すなわち

$$q = 5$$

のとき接する．このとき解は $b = 6$ (重解) であり，接点は領域①に含まれている．

③′ と直線 AD : $c = -b + 1$ を連立すると

$$-\frac{b^2}{4} + q = -b + 1$$

$$\therefore\quad b^2 - 4b + 4 - 4q = 0$$

であり，(判別式) $= 0$ のときの解は $b = 2$ (重解) であり，接点は領域①には含まれない．したがって，接点に近い点 D を③が通るとき，q は最小となる．

D は線分 CD 上の点でもあるから，q の最小値は 5 である．

点 $(b,\ c)$ が領域①内で動くとき，q の値は連続的に変化するので，q のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{5 \leqq q \leqq \frac{25}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 頂点の y 座標 q が 6 のとき

$$f(x) = -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + 6$$

$f(x) = 0$ とすると $x = \dfrac{b}{2} \pm \sqrt{6}$ である．$\alpha = \dfrac{b}{2} - \sqrt{6},\ \beta = \dfrac{b}{2} + \sqrt{6}$ とおくと

$$f(x) = -(x - \alpha)(x - \beta)$$

であり

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}(2\sqrt{6})^3 \\ &= \boldsymbol{8\sqrt{6}} \end{aligned}$$ ……(答)

- $s=b+c$，$t=3b+c$ と変数変換して，(1)，(2) を解く．

$$① \iff \begin{cases} 1 \leqq s \leqq 3 \\ 14 \leqq t \leqq 15 \end{cases}$$

であり

$$b=\frac{t-s}{2}, \quad c=\frac{3s-t}{2}$$

である．

(1) $f(4) = -16 + 4\cdot\dfrac{t-s}{2} + \dfrac{3s-t}{2} = -\dfrac{s}{2} + \dfrac{3}{2}t - 16$

s, t は独立した変数である．t を固定し，s を動かすと

$$-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t - 16 \leqq f(4) \leqq -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t - 16$$

$$\therefore \quad \frac{3}{2}t - \frac{35}{2} \leqq f(4) \leqq \frac{3}{2}t - \frac{33}{2}$$

ついで，t を動かすと

$$\frac{3}{2}\cdot 14 - \frac{35}{2} \leqq f(4) \leqq \frac{3}{2}\cdot 15 - \frac{33}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{7}{2} \leqq f(4) \leqq 6$$

(2) $f(x) = -\left(x-\dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{b^2}{4} + c$ より，$y=f(x)$ の頂点の y 座標 q は

$$\begin{aligned} q &= \frac{b^2}{4} + c = \frac{1}{4}\left(\frac{t-s}{2}\right)^2 + \frac{3s-t}{2} \\ &= \frac{1}{16}(t^2 - 2st + s^2) + \frac{3}{2}s - \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{16}s^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{t}{8}\right)s + \frac{t^2}{16} - \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{16}(s+12-t)^2 + t - 9 \end{aligned}$$

t を固定するとき，$2 \leqq t-12 \leqq 3$ であり，軸 : $s=t-12$ は s の変域 $1 \leqq s \leqq 3$ の中にある．s の変域の中点が $s=2$ であることに注意すると，q は $s=1$ のとき最大となるから

$$t - 9 \leqq q \leqq \frac{1}{16}(1+12-t)^2 + t - 9$$

$$t - 9 \leqq q \leqq \frac{1}{16}t^2 - \frac{5}{8}t + \frac{25}{16}$$

$$t - 9 \leqq q \leqq \frac{1}{16}(t-5)^2$$

ついで，t を動かすと

$$14 - 9 \leqq q \leqq \frac{1}{16}(15-5)^2$$

$$\therefore \quad 5 \leqq q \leqq \frac{25}{4}$$