O を原点とする座標平面上の放物線 $y = x^2 + 1$ を C とし，点 $(a,\ 2a)$ を P とする．

(1) 点 P を通り，放物線 C に接する直線の方程式を求めよう．

C 上の点 $\left(t,\ t^2+1\right)$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}tx - t^2 + \boxed{\text{イ}}$$

である．この直線が P を通るとすると，t は方程式

$$t^2 - \boxed{\text{ウ}}at + \boxed{\text{エ}}a - \boxed{\text{オ}} = 0$$

を満たすから，$t = \boxed{\text{カ}}a - \boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}$ である．よって $a \fallingdotseq \boxed{\text{ケ}}$ のとき，P を通る C の接線は 2 本あり，それらの方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{コ}}a - \boxed{\text{サ}}\right)x - \boxed{\text{シ}}a^2 + \boxed{\text{ス}}a \qquad \cdots\cdots ①$$

と

$$y = \boxed{\text{セ}}x$$

である．

(2) (1) の方程式①で表される直線を ℓ とする．ℓ と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ r)$ とすると，$r = -\boxed{\text{シ}}a^2 + \boxed{\text{ス}}a$ である．$r > 0$ となるのは，$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のときであり，このとき，三角形 OPR の面積 S は

$$S = \boxed{\text{チ}}\left(a^{\boxed{\text{ツ}}} - a^{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

となる．

$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，S の増減を調べると，S は $a = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ をとることがわかる．

(3) $\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，放物線 C と (2) の直線 ℓ および 2 直線 $x = 0$, $x = a$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}a^3 - \boxed{\text{ヒ}}a^2 + \boxed{\text{フ}}$$

である．$\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq a < \boxed{\text{タ}}$ の範囲において，T は $\boxed{\text{ヘ}}$．$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

⓪ 減少する
① 極小値をとるが，極大値はとらない
② 増加する
③ 極大値をとるが，極小値はとらない
④ 一定である
⑤ 極小値と極大値の両方をとる

(17 年 センター本試験 II・B 第 2 問)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
2	1	2	2	1	2	1	1	1	4	2	4	4	2	0	1

チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ
2	2	3	2	3	8	27	7	3	3	a	2

【チェック・チェック】

まずは，曲線外の点を通る 2 本の接線を求めます．次は，2 本の接線と y 軸で囲まれた三角形の面積，曲線と接線および y 軸と平行な 2 本の直線で囲まれた図形の面積を求めます．どの部分の面積を求めているのかを，図を描き確認しながら計算していきましょう．

【解答】

(1) $C : y = x^2 + 1$ 上の点 $\left(t,\ t^2 + 1\right)$ における接線の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2 + 1$$

$$\therefore\quad y = \boxed{\mathbf{2}}tx - t^2 + \boxed{\mathbf{1}} \qquad \cdots\cdots\ (\text{ア，イの答})$$

である．この直線が $\mathrm{P}(a,\ 2a)$ を通るとすると，t は方程式

$$2a = 2at - t^2 + 1$$

$$t^2 - \boxed{\mathbf{2}}at + \boxed{\mathbf{2}}a - \boxed{\mathbf{1}} = 0 \quad \cdots\cdots\ (\text{ウ〜オの答})$$

$$(t - 2a + 1)(t - 1) = 0$$

を満たすから

$$t = \boxed{\mathbf{2}}a - \boxed{\mathbf{1}},\quad \boxed{\mathbf{1}} \qquad \cdots\cdots\ (\text{カ〜クの答})$$

である．

$2a - 1 = 1$ となるのは $a = 1$ のときであるから

$$a \fallingdotseq \boxed{\mathbf{1}} \qquad \cdots\cdots\ (\text{ケの答})$$

のとき，P を通る C の接線は 2 本あり，それらの方程式は

$$y = 2(2a - 1)x - (2a - 1)^2 + 1$$

$$\therefore\quad y = \left(\boxed{\mathbf{4}}a - \boxed{\mathbf{2}}\right)x - \boxed{\mathbf{4}}a^2 + \boxed{\mathbf{4}}a \quad \cdots\cdots\ ①$$

$\cdots\cdots$ (コ〜スの答)

と

$$y = \boxed{\mathbf{2}}x \qquad \cdots\cdots\ (\text{セの答})$$

である．

(2) (1) の方程式①で表される直線を ℓ とする．ℓ と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ r)$ とすると

$$r = -4a^2 + 4a$$

である．$r > 0$ となるのは

$$-4a^2 + 4a > 0$$

$$-4a(a - 1) > 0$$

$$\boxed{\mathbf{0}} < a < \boxed{\mathbf{1}} \qquad \cdots\cdots\ (\text{ソ，タの答})$$

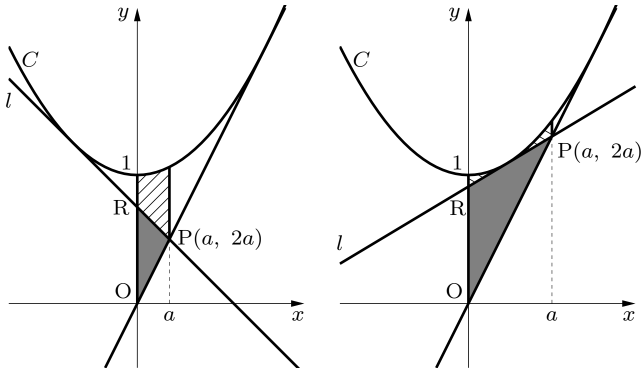
のときであり，このとき，三角形 OPR の面積 S は

$\longleftarrow$ $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$y = f'(t)(x - t) + f(t)$

である．

$\longleftarrow$ $2a - 1 = 1$ のとき，2 本の接線は重なる．



⟵ C と l の接点が y 軸の左側，右側のどちらにあっても S，T のとり方に影響しない．

$$S = \frac{1}{2}(-4a^2 + 4a)\cdot a$$

$$= \boxed{\mathbf{2}}\left(a^{\boxed{\mathbf{2}}} - a^{\boxed{\mathbf{3}}}\right) \qquad \cdots\cdots \text{(チ～テの答)}$$

⟵ $S = \dfrac{1}{2}\mathrm{OR}\cdot(\mathrm{P}$ の x 座標$)$

となる．

$$S' = 2(2a - 3a^2) = 2a(2 - 3a)$$

$0 < a < 1$ のとき，S の増減を調べると

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
S'	(0)	$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

⟵ 増減表をかこう．

増減表より，S は $a = \dfrac{\boxed{\mathbf{2}}}{\boxed{\mathbf{3}}}$ $\qquad \cdots\cdots$ (ト，ナの答)

で最大値

$$2\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right\} = \frac{\boxed{\mathbf{8}}}{\boxed{\mathbf{27}}} \qquad \cdots\cdots \text{(ニ，ヌネの答)}$$

をとる．

(3) $0 < a < 1$ のとき，斜線部分の面積 T は

$$T = \int_0^a (x^2 + 1)\,dx - \frac{1}{2}\{(-4a^2 + 4a) + 2a\}\cdot a$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^a - (-2a^3 + 3a^2)$$

$$= \frac{\boxed{\mathbf{7}}}{\boxed{\mathbf{3}}}a^3 - \boxed{\mathbf{3}}\,a^2 + \boxed{a} \qquad \cdots\cdots \text{(ノ～フの答)}$$

⟵ 曲線の下側から台形を除く．

である．

$$T' = 7a^2 - 6a + 1 = 7\left(a - \frac{3}{7}\right)^2 - \frac{2}{7}$$

⟵ T の増減は導関数 T' の符号により決まる．

軸の方程式 $a = \dfrac{3}{7}\left(< \dfrac{2}{3}\right)$ より，$\dfrac{2}{3} \leqq a < 1$ の範囲において，T' は単調増加であり

$$T'_{a=\frac{2}{3}} = 7\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 6\cdot\frac{2}{3} + 1 = \frac{28}{9} - 3 = \frac{1}{9} > 0$$

⟵ T' の $a = \dfrac{2}{3}$ における符号を調べる．

である．

よって，$\dfrac{2}{3} \leqq a < 1$ の範囲において，$T' > 0$ であり，T は増加

する．$\boxed{\quad へ \quad}$ に当てはまるものは $\boxed{\mathbf{2}}$ である．　　…… (への答)

- $T'=0$ となる a の値は $a=\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{7}$ であり

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}-\frac{3+\sqrt{2}}{7}&=\frac{14-(9+3\sqrt{2})}{21}=\frac{5-3\sqrt{2}}{21}\\&=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{18}}{21}>0\end{aligned}$$

であるから，$\dfrac{2}{3}\leqq a<1$ の範囲において，$T'>0$ であり，T は増加する．

$\longleftarrow$ T' の符号の変わり目が $\dfrac{2}{3}\leqq x<1$ の範囲にあるか否かを調べるために，まずは $\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$ と $\dfrac{2}{3}$ の大小を調べる．