方程式 $x^2+2xy+4y^2+2x+4y-4=0$ を考える．

(1) 上の方程式を y について解け．また，上の方程式を満たす x, y がどちらも実数であるような x の範囲を求めよ．

(2) (1) で得られた 2 つの関数のグラフを極大値，極小値を明記し，上に凸か下に凸かも考慮して描け．ただし，x の範囲は (1) で得られたものとする．

(17 愛知教大 8)

【答】

(1) $y=\dfrac{-x-2\pm\sqrt{-3x^2-4x+20}}{4}$，$-\dfrac{10}{3}\leqq x\leqq 2$

(2) 略

【解答】

(1) 方程式

$$x^2+2xy+4y^2+2x+4y-4=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を y について整理し

$$4y^2+2(x+2)y+x^2+2x-4=0$$

y について解くと

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(x+2)\pm\sqrt{(x+2)^2-4(x^2+2x-4)}}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{-x-2\pm\sqrt{-3x^2-4x+20}}{4}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

また，x が実数のとき，y が実数である条件は

$$-3x^2-4x+20\geqq 0 \qquad \therefore\quad -(3x+10)(x-2)\geqq 0$$

すなわち

$$-\frac{10}{3}\leqq x\leqq 2$$

である．したがって，方程式①を満たす x, y がどちらも実数であるような x の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{10}{3}\leqq x\leqq 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) x の範囲を $-\dfrac{10}{3}\leqq x\leqq 2$ ……② とし，(1) の 2 つの関数を

$$f(x)=\frac{-x-2+\sqrt{-3x^2-4x+20}}{4}$$

$$g(x)=\frac{-x-2-\sqrt{-3x^2-4x+20}}{4}$$

とおく．$-\dfrac{10}{3}<x<2$ ……②$'$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{-6x-4}{2\sqrt{-3x^2-4x+20}} \\ &= -\frac{1}{4}-\frac{3x+2}{4\sqrt{-3x^2-4x+20}} \end{aligned}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{-3x^2-4x+20}-(3x+2)\cdot\dfrac{-6x-4}{2\sqrt{-3x^2-4x+20}}}{-3x^2-4x+20}$$
$$= -\frac{3(-3x^2-4x+20)+(3x+2)^2}{4(-3x^2-4x+20)\sqrt{-3x^2-4x+20}}$$
$$= \frac{-16}{(-3x^2-4x+20)\sqrt{-3x^2-4x+20}}$$

である．②$'$ の範囲では $f''(x)<0$ である．$f'(x)=0$ を解くと

$$-\frac{1}{4}-\frac{3x+2}{4\sqrt{-3x^2-4x+20}}=0$$
$$\iff -(3x+2)=\sqrt{-3x^2-4x+20}$$
$$\iff \begin{cases}(3x+2)^2=-3x^2-4x+20\\ 3x+2\leqq 0\end{cases}$$

方程式を変形すると

$$12x^2+16x-16=0$$
$$(3x-2)(x+2)=0$$

$x\leqq -\dfrac{2}{3}$ より，$x=-2$ であり，$f(x)$ の増減・凹凸は右の表のようになる．

x	$-\frac{10}{3}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	2
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$$f(-2)=\frac{-(-2)-2+\sqrt{-3\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)+20}}{4}=1\ (\text{極大値})$$
$$f\left(-\frac{10}{3}\right)=-\frac{-\left(-\frac{10}{3}\right)-2+\sqrt{0}}{4}=\frac{1}{3}$$
$$f(2)=\frac{-2-2+\sqrt{0}}{4}=-1$$

さらに，$f'(x)$ の定義域の端点における右極限と左極限を調べると

$$\lim_{x\to-\frac{10}{3}+0}f'(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 2-0}f'(x)=-\infty$$

である．

同様にして

$$g'(x)=-\frac{1}{4}+\frac{3x+2}{4\sqrt{-3x^2-4x+20}}$$
$$g''(x)=\frac{16}{(-3x^2-4x+20)\sqrt{-3x^2-4x+20}}$$

であり，②$'$ の範囲では $g''(x)>0$ である．$g'(x)=0$ となるのは

$$-\frac{1}{4}+\frac{3x+2}{4\sqrt{-3x^2-4x+20}}=0$$
$$\iff 3x+2=\sqrt{-3x^2-4x+20}$$
$$\iff \begin{cases}(3x+2)^2=-3x^2-4x+20\\ 3x+2\geqq 0\end{cases}$$

となる．方程式を変形すると

$$(3x-2)(x+2)=0$$

$x \geqq -\dfrac{2}{3}$ より，$x=\dfrac{2}{3}$ であり，$g(x)$ の増減・凹凸は右の表のようになる．

x	$-\frac{10}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$g''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

$$g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{-\left(\frac{2}{3}\right)-2-\sqrt{-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+20}}{4}=-\frac{5}{3}\ (\text{極小値})$$

$$g\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$$g(2)=-1$$

さらに，$g'(x)$ の定義域の端点における右極限と左極限を調べると

$$\lim_{x\to-\frac{10}{3}+0} g'(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to 2-0} g'(x)=\infty$$

である．よって，グラフは下図となる．