a を定数とする．方程式

$$e^{4x-11}-2ax^3+12ax^2-24ax+16a=0$$

が実数解をもつのは

$$a<\boxed{\text{ス}},\quad a\geqq\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$

のときである．

(17 東京理大 薬 1(2))

【答】

ス	セソ	タチ
0	32	27

【解答】

$$e^{4x-11}-2ax^3+12ax^2-24ax+16a=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

①を変形する．

$$① \iff e^{4x-11}=2a(x^3-6x^2+12x-8)$$
$$\iff e^{4x-11}=2a(x-2)^3$$

(左辺) >0 より $x\fallingdotseq 2$ であるから

$$① \iff \frac{e^{4x-11}}{2(x-2)^3}=a$$

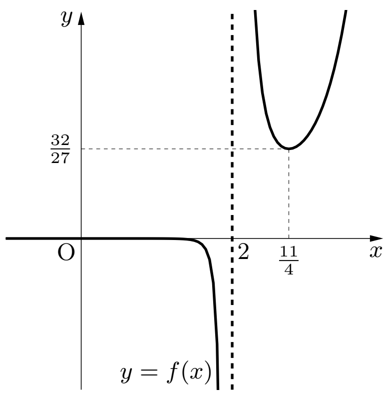
$f(x)=\dfrac{e^{4x-11}}{2(x-2)^3}$ $(x\fallingdotseq 2)$ とおくと，①が実数解をもつ条件は $y=f(x)$ と $y=a$ が共有点をもつことである．

$$f(x)=\frac{1}{2e^{11}}\cdot\frac{e^{4x}}{(x-2)^3}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2e^{11}}\cdot\frac{4e^{4x}\cdot(x-2)^3-e^{4x}\cdot 3(x-2)^2}{(x-2)^6}=\frac{1}{2e^{11}}\cdot\frac{e^{4x}(4x-11)}{(x-2)^4}$$

増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{11}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘		↗



ここで

$$f\left(\frac{11}{4}\right)=\frac{32}{27}$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$
$$\lim_{x\to2-0}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to2+0}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

であり，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる．

よって，①が実数解をもつ条件は

$$\boldsymbol{a<0,\quad a \geqq \frac{32}{27}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．